輔仁管理評論

中華民國 97 年 5 月，第十五卷第二期，83-96

投資組合最適化的數值方法

李泰明*

(收稿日期：96 年 12 月 28 日；第一次修正：97 年 1 月 18 日；
接受刊登日期：97 年 1 月 31 日)

摘要

雖然近期利率有回升的現象，但是因爲前一陣子面對利率一降再降，把錢放在銀行升息，可以獲得的利息將愈來愈少，不僅對許多要靠定存收入過活的銀髮族是一大警訊，即使是不靠定存維生的普羅大眾也不想讓資產成了呆錢。可是，錢不放在銀行，能往何處去？民眾愈活用資產的理財需求，帶來了新金融商品發展的市場動力。金融商品多樣化之後，投資組合的策略問題就成了很重要的課題。本文利用蒙地卡羅的數值方法去描述投資組合最適化的數值問題，並利用繪圖的技術去傳達重要的思考，如效率前緣等。

關鍵詞彙：投資組合最適化，蒙地卡羅法，效率前緣

壹· 導論

一、動機

這幾年台灣的金融商品市場一直不斷地開放更新，其目的是要跟上世界的潮流。金融市場的發展維繫著國家總體經濟面的命脈，因爲金融市場的活絡和經濟的成長及技術的開發是一種互爲因果的微妙關係。在財政學裡我們知道政府如何透過某種政策和制度面的操作，進而影響整體經濟面的發展，同時也朝向我們希望的方向前進，就好像當你開車時發現車子偏向左邊，你就會把方向盤向右轉，將它校正回來。

金融市場的自由化是啓動經濟動能的一種原動力，就好像是民主和法治的關係一樣。這個市場的「遊戲規則」必須要完善地建立起來。例如體育活動一樣，人民要享受精采的球賽有兩大要件：

1.競爭的硬度要夠，這就是市場的自由化。一但自由化，有能力的人自動會來加入，分食這塊大餅。透過競爭，人類的潛能會被激發出來，這項

* 作者簡介：李泰明，輔仁大學統計資訊學系副教授。

活動就會愈來愈精采。

2.遊戲規則要完備，這就是市場制度面的建立。而更重要的是要努力去嚴格執行這個遊戲規則，其用意就是要避免這個系統被破壞，被一些不靠其〝真本事〞而想成就的人破壞。所以我們馬上可以聯想，股市的「內線交易」和職棒的「打假球」根本就是同一回事。

金融市場的自由化還有另一個特色就是多樣化。這幾年各種形形色色的金融商品不斷的創新推出，使得投資人可以選擇的商品一直增加。從基本的債券、股票、基金，一直到衍生性金融商品，如期貨、選擇權、交換…等。這些商品又建構在許多不同的標的上，所以使得種類之多樣化速度激增。請參閱(于趾琴，2002)。

不管金融商品有多少種，若要將這些商品做學理上的整頓，不外乎有三個重要的量化指標：

1.期望報酬率：意思是說這種投資的報酬率並不是固定的，隨著時間的變動時高時低。如果我們以無風險的投資報酬率當作「機會成本」的標準來看，就是有時賺有時賠；有時賺多，有時賠多；有時賺少，有時賠少。若以 R_f 代表無風險投資報酬率，如放在銀行的定存。R_i 代表某商品的報酬率，當 R_i 被觀測到之後，我們就有

$R_i > R_f$ **(代表賺)**

$R_i < R_f$ **(代表賠)**

而所謂期望報酬就是在這個賺賺賠賠的現實環境中，不確定性雖然是絕對無法避免的，但是這種不確定的值，平均起來大約是怎樣的值？

2.報酬率的變異：因為報酬率是一個不確定的數，那麼這種變異的測度是怎樣的一個數值？它有能力去描述這種報酬率的離散情形，換成財務上的術語就是這種投資必須承擔多大的「風險」？期望報酬與風險是有關係的，也就是期望報酬高的商品，它所承受的風險也一定高。這就是「天下沒有白吃的午餐」。若我們要享受這種獲利較高的「可能性」，則我們同時就要承擔損失較高的「可能性」。這是一種自由市場機制下自動形成的「自然現象」。以 σ_i^2 代表第 i 種商品報酬率的變異。又假設現在市場中有 i，j 兩種商品，若 $R_i > R_j$ 而且 $\sigma_i^2 < \sigma_j^2$，則第 j 種商品就不可能存在，

這道理很簡單，因爲沒有人會投資它，但是對這四個參數的真實值是多少對投資者而言可獲得的訊息太少，所以才會有盲目的投資舉動。

3.各種商品之間報酬率的關聯性：不同的商品雖然操作方式不同，但它們都是在同一個總體經濟大環境下的產物。所以各種商品報酬率的變動通常都是有「連動」的關係存在。這種關係就是統計學上的「關聯性」，關聯性表示兩變數之間有互動的關係，但這種互動性不一定可以解釋成何者爲因，何者爲果。有時我們把這種互動性解釋成背後一些共同的總體經濟變因所製造出來的「共同果」。統計上測度這種互動性強烈大小的指標就是「相關係數」或是「共變數」。關聯性是我們在選擇投資組合讓它發揮「組合效果」時最重要的因素。因爲各商品間若沒有關聯性，則投資組合就起不了作用。

二、研究方法

首先定義如下之數學式：

$$R = (R_1, R_2, \ldots, R_k)' \tag{1}$$

接著有

$$E(R) = r = (r_1, r_2, \cdots, r_k)'$$

$$Var(R) = \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & & \\ & \sigma_2^2 & & \sigma_{ij}^2 & \\ & & \ddots & & \\ & \sigma_{ji}^2 & & \ddots & \\ & & & & \sigma_k^2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

將各種商品的報酬率排成一個向量R，如方程式(1)所示。這向量裡有k種不同的商品。根據前面所述這個R是一個「隨機向量」。向量是將問題一般化的一個非常有用的機制，這種機制可以令我們同時分析許多個變量，而運算式卻非常簡潔有力，不致於看到太多太繁雜的加總和相乘符號。這使得「矩陣代數」在財務數學上佔有非常重要的地位。若將這個隨機向量取期望值，則它

仍然是一個向量，我們以$E(R)$代表之。接著我們定義這個隨機向量的變異共變矩陣以$Var(R)$代表之，如方程式(2)所示，它是一個K×K的矩陣，其對角線放置各商品報酬率的變異，而非對角線則放置兩兩商品報酬率的共變數。這矩陣會唯一決定一個相關係數矩陣，去測度這群商品的關聯性。

貳. 投資組合

一、投資組合的定義

首先定義配置向量：

$$w=(w_1,w_2,w_3,\ldots w_k) \qquad \sum w_i=1 \tag{3}$$

接著定義投資組合：

$$P(w)=w'R \tag{4}$$

接著有投資組合的期望值與變異數如下：

$$E(P(w))=w'r \quad \text{和} \quad Var(P(w))=w'\Sigma w \tag{5}$$

方程式(3)將總投資金額配置到這K種商品的分配比率。也就是我們定義一個配置向量W，這裡面的成分分別是投資在各商品的比例，這樣的定義自動形成了限制式$\Sigma W_i=1$。而投資組合$P(W)$定義如方程式(4)，這個投資組合的期望報酬率，當然也就是各期望報酬率的加權平均數，也就是$E(P(w))$。如果我們接著問「這個投資組合的變異數是多少？」則在矩陣代數上會形成一個美妙的二次式，也就是方程式(5)。這個Σ就是前述方程式(2)定義的變異共變矩陣。從這裡我們似乎最初感受到矩陣代數的功效和它所呈現的美妙之處。

二、目標函數

我們以R_f代表無風險報酬率 (Risk-free rate)，則目標函數形成如下的數學式：

$$\theta(w) = \frac{w'r - R_f}{\sqrt{w'\Sigma w}} \quad (Sharpe \quad Ratio)$$

這個目標函數在財務上稱爲夏普比率。

接著要將它極大化，其程序爲：

$$\underset{w}{Max} \quad \theta(w) = \frac{w'r - R_f}{\sqrt{w'\Sigma w}} \qquad s.t. \quad \sum w = 1$$ 這代表要變動 W 向量使得目標函數極大化，但受制於 W 向量內的元素和必須爲 1，若我們改變目標函數則也可以是如下的極小化過程

$$\underset{w}{Min} \quad w'\Sigma w - \lambda w'r \qquad s.t. \quad \sum w = 1$$

這代表我們要定義投資組合最適化的目的是要選擇一種配置方式，也就是要去決定一個 w 向量，使得這個投資組合可以達到某種“最適化”的目的。首先這裡的無風險報酬率爲 R_f，當然我們可以用放在銀行的定存利率來理解這件事，也就是這種報酬率是一種契約關係，不受任何市場風險，或其他風險的影響。當然有人會說放在銀行的定存是否會因爲“銀行倒閉”而血本無歸，那也正好是中央存保公司存在的價值了。

投資組合的期望報酬率 $E(P(w))$ 一定會比 R_f 來得高，因爲這是承擔風險該得到的酬勞。我們當然希望這個正的差距 $(w'r - R_f)$ 愈大愈好，此表示所獲得的風險貼水越高。

但是當我們調整ｗ去選擇不同的投資組合時，這個投資組合的意思也隨之改變，也就是我們同時面臨風險的改變，當然我們希望風險愈小愈好，所以我們將 $w'r - R_f$ 除以風險的開根號而形成 $\theta(w)$。既然 $\theta(w)$ 是這樣形成的，就希望 $\theta(w)$ 愈大愈好，因爲我們可以同時考慮分子分母的變化，而達到一種互相平衡的效果，這就是所謂的”目標函數”。所以我們設定的目的是在數學或數值上使這目標函數極大。若我們把目標函數設成 $w'\sum w - \lambda w'r$，則目的變成求這函數的極小。限制式 $\sum w = 1$ 是必要的，因爲形成數學上”限制式下求極大極小“的問題。這方面的論文最近較具代表性的有 (Alexei A. Gaivoronski & Georg Pflug,2004；Matthias Ehrgott & Kathrin Klamroth & Christian Schwehm, 2004)。數值技術上值得參考的 (Paolo Brandimarte, 2002)

接著我們敘述何謂“Markowitz Curve”。這條曲線並非直接在目標函數上求數值，而是先將 $w'r$ 固定在某一個值下去求變異的極小，也就是求標準差的極小・這樣一來每次固定一個 $w'r=c$ ，求一次極小，就自然在二度空間上形成一個點。將這些點連起來就形成了一條曲線。這條曲線是傳遞思考一個非常重要的中間步驟，在投資學中是最基礎的思考，我們會以不同的方式繪出這條曲線。

參· 蒙地卡羅方法

一、受限制的均勻分布

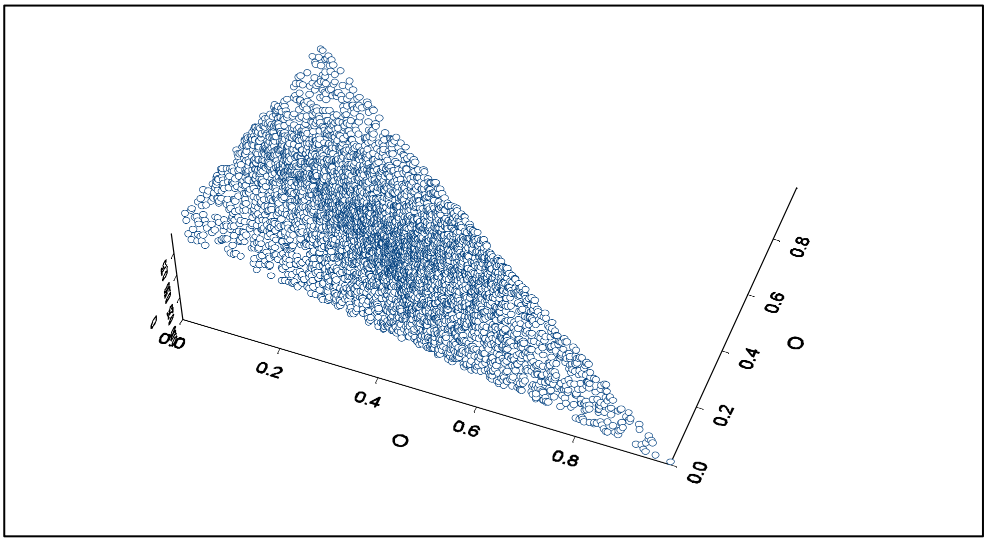
以下是蒙地卡羅方法的數學式。首先我們定義一個U向量如下：

$$U=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} \xleftarrow{R.S.} Uniform(0,1) \qquad \textbf{(Simulation)}$$

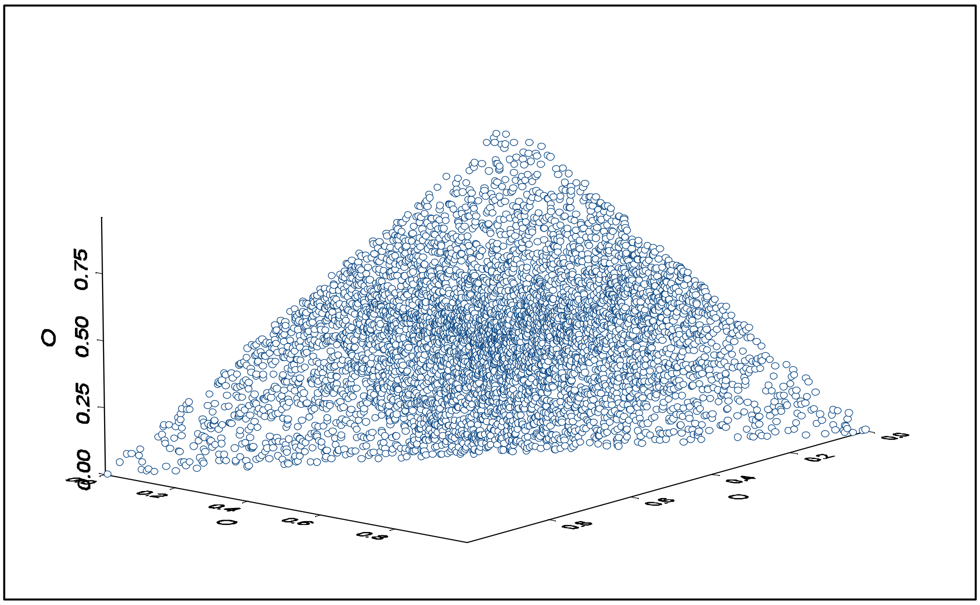
這裡的 R.S. (Random sampling) 代表從右邊的母體做統計模擬的抽樣

接著令 $$W=\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_k \end{pmatrix}=U \bullet \frac{1}{\sum u_i}$$ 則得到 $\sum w_i = 1$

蒙地卡羅的數值方法在這個問題的詮釋上會發揮很好的作用。這種運算技術可以很直接地傳達重要的思考，而且還能避免掉繁雜的數學推導。首先我們思考這個問題的本身是要找尋一個向量 W，使得某種目標函數可以最適化。那麼我們就直接以電腦大量地去產生這些隨機向量，但是必須有 $\sum W = 1$ 的限制。於是我們就先產生一個 U 向量，其中的每一元素都由均勻分布 U(0,1) 來獨立產生，這樣的技術我們稱爲模擬。統計模擬的技術請參閱 (Sheldon M. Ross, 1997)，但是以這樣方式產生的向量其元素和不爲 1，所以我們將這個向量的每個元素都除以它們的總和，這樣就會使得這個向量滿足 $\sum W_i = 1$ 的限制。



圖一　3D Plot



圖二　Different Angle

我們以三度空間繪圖的技術來傳達這個思考。上面圖一和圖二是限定 W 向量內只有三個元素，而這三個元素的和爲 1。理所當然會形成在三度空間的座標軸上。我們會看到這個重複的 10000 點在三度空間上是撒在一個傾斜的平面上，這個平面正好通過正立方體六個頂角中的三個頂角。有一點必須說明的是，這 10000 個隨機向量，原本是由均勻分布 U(0,1) 產生的，但是一旦強迫

它的和爲 1，這 10000 個隨機向量在這個傾斜的平面上並不是均勻分布，而是較靠近中央的部分密度較高，而愈靠近三個頂角的部分密度較低。

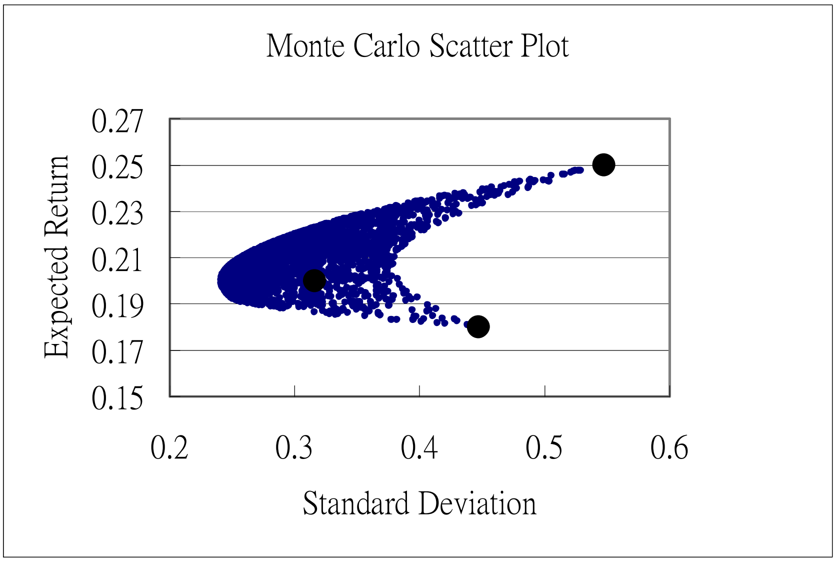
二、以二度空間散佈點呈現效率前緣

我們將以前述的一萬個隨機向量 $w_1, w_2 \cdots\cdots w_{10000}$ 代入期望報酬率與標準差之公式，而得到如下的一萬對二度空間散播點。

$$w'_j\, r \qquad vs. \qquad \sqrt{w'_j \sum w_j} \qquad\qquad j = 1 \cdots 10000$$

我們以如下的 r 向量和 Var(R) 來當作例題，$r' = [0.18 \quad 0.25 \quad 0.2]$

$$Var\,(R) = \Sigma = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.05 & -0.01 \\ & 0.3 & 0.015 \\ & & 0.1 \end{pmatrix}$$

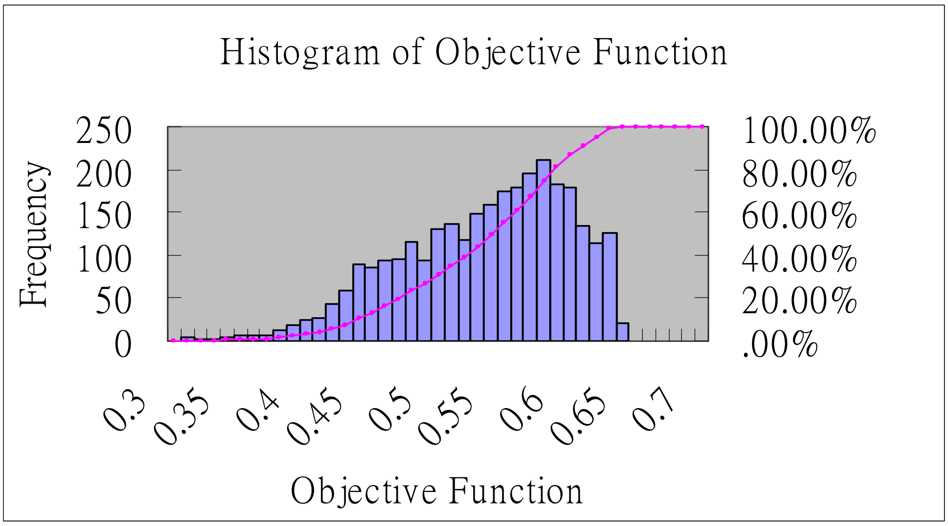


圖三　Monte Carlo Scatter Plot

接下來我們以一個例題來詮釋這個思考，以上述的 r 向量和 $Var(R) = \sum$ 當作例題，將產生出來的 10000 個 w 向量 (數學式(6)) 帶入運算 E(P(w)) 及 $\sqrt{Var(P(w))}$，如上式所述。再將這些打在二度空間的座標軸上，而形成上圖三之蒙地卡羅散佈圖。首先要注意縱軸是投資組合的期望報酬率橫軸爲對應之

標準差。而其中較深黑色的三個點為原始的三種商品的期望報酬率與標準差。將這兩種圖形放在一起，我們可以清楚地看到這 10000 種“嘗試性”的投資組合和原來那三個點的對應關係。我們可以清楚地看出來，這 10000 種嘗試中有些投資組合可以達到原始三個期望報酬的平均水準，但是所承擔的風險卻遠小於原來最小的值 (0.3)，而大約只有 0.24。

接著將這一萬個向量投入目標函數 $\theta(w_j)$，排序後得到 $\theta_{(1)}$，$\theta_{(2)}$，…… $\theta_{(10000)}$，再將排序後的值製成直方圖如下：



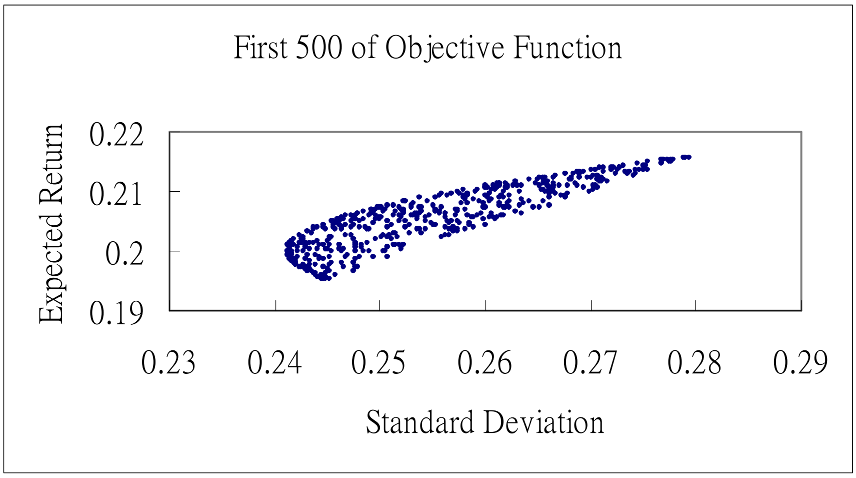
圖四　Generate Histogram of Objective Function

將這嘗試的 10000 個隨機向量投入目標函數 $\theta(w)$。於是會產生 10000 個 $\theta(w)$，再將之排序，而繪製成次數分佈圖或稱長條圖 (圖四)。這種長條圖雖然是初等統計的課程內容，但是它卻在蒙地卡羅方法中扮演著非常重要的角色，經過這個長條圖的繪製，我們可以清楚地看到這 10000 個嘗試性的目標函數值大約著落再 0.4 ~ 0.65 之間，而其分佈狀況是一個左偏有一點雙峰的形式，頻率最高是在 0.6 附近，而其最大值大約是 0.66。

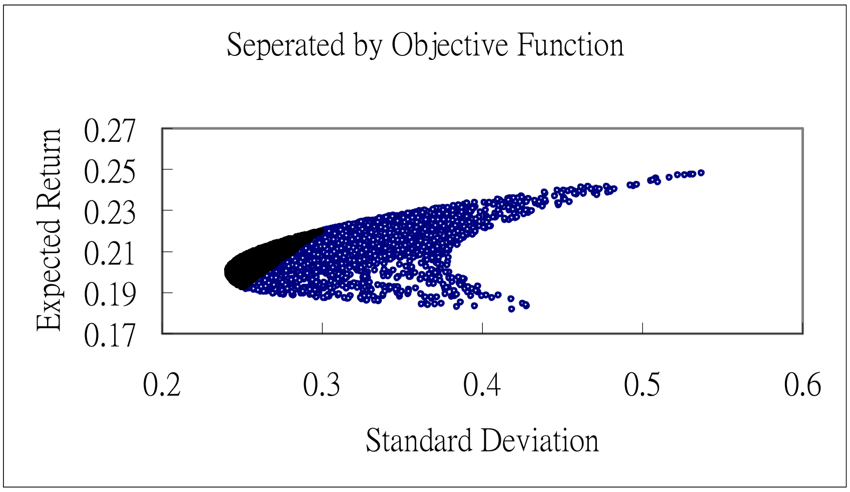
三、效率前緣的形成

我們將這 10000 個排序後的目標函數，取出前 500 名，在統計學上稱之為秩序統計量。排序雖然在許多套裝軟體內是內建的功能，但是在一般的自然程式語言，要操作就有一點難度，而 C++有 Sort() 程式可以直接使用。並且

有 (William H. Press & Saul A. Teukolsky & William T. Vetterling & Brain P. Flannery, 2002) 所提供的程式可使用。



圖五　First 500 of Objective Function



圖六　Delineating Efficient Portfolios

接下來一個較難的運算動作，是要將這前 500 名的目標函數它們所對應的期望報酬率和標準差找出來。也就是說這 500 個目標函數是由哪一些 E(P(W)) 和 Var(P(W)) 所形成的，然後再將這 500 個二度空間上的點分配在座標軸上。我們可以清楚地看到所謂的「效率前緣」是如何形成的，像用一把刀切出一塊東西，這個散佈點所形成的圖形，其左前方彎曲的部分就是「效率前緣」，也就是說投資組合最適化的解應該就在這個邊界上，如圖五。接下來，我們再把

這個圖形放回來原來 10000 個點所形成的散佈圖，如圖六，使用較深黑的點將它們區隔開來。我們可以清楚地看到這個圖形被斜傾地直線割下一塊，及其相對的位置，而這樣切割的斜線延伸後通過縱軸的位置正好就是 R_f ，無風險投資報酬率。

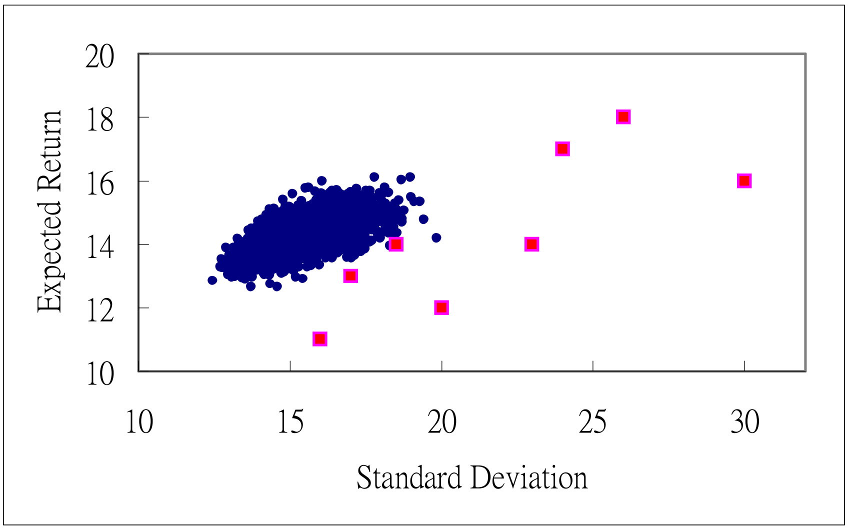
四、增加維度

現在我們以 (EDWIN J. ELTON & MARTIN J. GRUBER, 1995) 書中爲例。

將商品數量增加爲八個

Correlatio n Coefficien ts

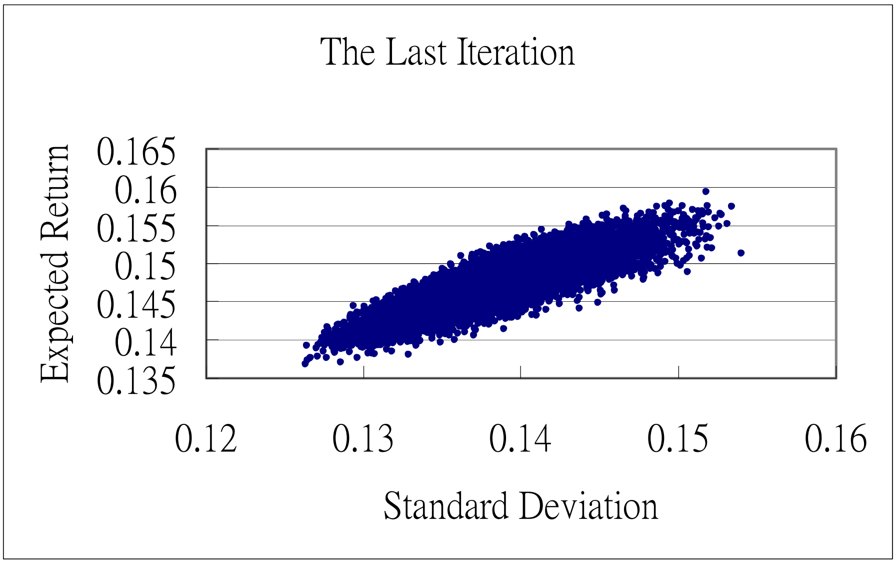
$$
\begin{array}{r}
S\&P \\ Bonds \\ Canadian \\ Japan \\ Emerging-Market \\ Pacific \\ Europe \\ Small-stock
\end{array}
\begin{pmatrix}
1.00 & 0.45 & 0.70 & 0.20 & 0.64 & 0.30 & 0.61 & 0.79 \\
 & 1.00 & 0.27 & -0.01 & 0.41 & 0.01 & 0.13 & 0.28 \\
 & & 1.00 & 0.14 & 0.51 & 0.29 & 0.48 & 0.59 \\
 & & & 1.00 & 0.25 & 0.73 & 0.56 & 0.13 \\
 & & & & 1.00 & 0.28 & 0.61 & 0.75 \\
 & & & & & 1.00 & 0.54 & 0.16 \\
 & & & & & & 1.00 & 0.44 \\
 & & & & & & & 1.00
\end{pmatrix}
\quad \textbf{(7)}
$$



圖七 Increasing Dimensionality

接下來我們試著用 (Edwin ＆ Martin, 1995) 書中的實際資料，將商品數量增加爲八個，將這八種商品的相關係數呈現出來，如數學式(7)所示，令我們瞭解其中的關聯強度。接著做類似前述的圖三，將這八個期望報酬率和標準差，分配在二度空間的散佈點座標上。再以同樣的方法嘗試 10000 個投資組合，得到像橢圓形的 10000 個散佈點。我們可以清楚地看到這個似橢圓的圖形，(圖七)，它的左前方的邊界，也就是效率前緣，變成比較不清楚，但是這個「組合效果」依然明顯地呈現，也就是說這些投資組合的期望報酬率大約是這八個商品的平均水準，但是標準差卻可以小到未曾出現的 0.125 左右。至於這個橢圓之所以會如此，那是因爲維度增加所形成的模糊現象。

要求的投資組合的最適化解，若以這樣蒙地卡羅的方式，我們可說選擇這 10000 個嘗試的投資組合中目標函數的第一名，所對應的 w 向量應該就是一個不錯的近似值，但是這種近似會隨著維度的增加而漸漸破壞，這也就是前述的橢圓邊界模糊掉的道理。所以我們若希望得到一個較精確的解，就必須要在縮小的範圍內繼續尋找。於是我們設計一個代疊過程，用縮小，尋找，再縮小，再尋找的方式反覆代疊，於是看它的收斂過程，經過 100 次的代疊得到的解爲數學式(8)，而其最適化解的期望報酬率爲 0.155，標準差爲 0.140。而其最後一次代疊的散佈圖 (圖八) 呈現出一個完美的橢圓，雖然邊界還是模糊。



圖八　The Solution

0.000	0.413	0.000	0.050	0.000	0.287	0.000	0.250
0.000	0.413	0.000	0.050	0.000	0.287	0.000	0.250
0.000	0.413	0.000	0.050	0.000	0.287	0.000	0.250
0.000	0.413	0.000	0.050	0.000	0.287	0.000	0.250

.

經過約 100 次代疊

得到解 = 0.000 0.413 0.000 0.050 0.000 0.287 0.000 0.250 (8)

最適化解的期望報酬率 = 0.155

其標準差 = 0.140

肆· 結論

台灣的財富管理市場潛力無窮，根據外國金融集團所進行的相關調查，我國資產在新台幣 300 萬元以上的家庭有 45 萬戶，而且還在持續成長中，預估到 2010 年時，將擴增到 100 萬戶。爲此，各家金融機構無不積極搶攻財富管理市場這塊大餅，不僅紛紛設立集合多種金融商品於一體的財富管理分行，更逐步降低提供專屬服務的貴賓理財門檻，使財富管理大眾化。然而，財富畢竟是自己的，面對理財專員端出來的一項金融產品，心中要有所定見。因此，了解金融商品，正是建立自我主張、累積財富的第一步。

參考文獻

于趾琴，「新金融商品大觀」，台北：聯經出版社，2003 年

Alexei A. Gaivoronski & Georg Pflug, "Value-at-Risk in Portfolio Optimization: Properties and Computational Approach", *Journal of Risk*, Vol. 7, No. 2, pp. 1-31.

Edwin J. Elton & Martin J. Gruber, "Modern Portfolio Theory and Investment Analysi". New York: John Wiley & Sons, 1995.

Matthias Ehrgott & Kathrin Klamroth & Christian Schwehm, "An MCDM Approach to Portfolio Optimization", *European Journal of Operational Research*, 2004.

Paolo Brandimarte, "Numerical Methods in Finance". New York: JOHN WILEY & SONS, 2002.

Sheldon M. Ross, "Simulation". San Diego: ACADEMIC PRESS, 1997.

William H. Press & Saul A. "Teukolsky & William T. Vetterling & Brian P. Flannery", NEUMERICAL

Portfolio Optimization using Monte Carlo Method

TAI-MING LEE*

ABSTRACT

The mean variance portfolio theory is based on a set of k available risky asset, for example bonds, stocks mutual funds, and derivatives, which rate of return and variance covariance matrix are estimated. The traditional method to maximize an objection function of this problem is computationally troublesome.On this paper the Monte Carlo Method is used to illustrate the Makowitz curve and efficient frontier by generating 10000 portfolio scatter plot. The histogram of objective function is created, and efficient portfolios are delineated. The numerical solutions of portfolio optimization are obtained by iterative converged methodology.

Keyword：portfolio optimization, Monte Carlo Method, efficient frontier.

* Tai-Ming LEE, Associate Professor, Department of Statistics, Fu Jen Catholic University.