

# 厚尾 GARCH 模型之波動性 預測能力比較

李命志 · 洪瑞成 · 劉洪鈞\*

(收稿日期：95 年 9 月 11 日；第一次修正：95 年 10 月 24 日；  
接受刊登日期：95 年 11 月 16 日)

## 摘要

本文分別以 Gaussian GARCH 模型、GARCH-GED 模型、GARCH-HT 模型，探討資產報酬率普遍存在高峰、厚尾現象時，何種分配的模型對於波動率具有較佳的相對預測能力。

實證結果顯示，在五種實證資料當中，GARCH-GED 模型與 GARCH-HT 模型在不同條件平均數方程式假設下，相對預測能力都比 Gaussian GARCH 模型佳。GARCH-HT 模型的相對預測能力則優於 GARCH-GED 模型。當以平均絕對誤差 (MAE) 作為評估準則，模型的優劣順序並沒有因為使用不同的衡量準則而發生改變。刪除極端值後，發現所有預測模型在不同條件平均數方程式設定下之 MSE 與 MAE 均明顯下降許多 (除布朗特原油外)，而重複進行 DM 檢定的結果亦指出模型的相對預測能力與刪除極端值之前的結論一致。特別的是，極端值確實會影響模型對波動性預測的績效。

本文採用移動視窗的方式進一步探討由 Politis (2004) 提出的厚尾分配與常見的 GED 分配再結合 GARCH 模型進行樣本外預測波動性的優劣。當改以同樣具備高峰、厚尾特性的 GED 分配與 HT 分配作比較時，更得以凸顯 HT 分配的優勢。再者，以 DM 檢定來呈現三種不同誤差項分配假設下 GARCH(1,1)模型之間的相對預測能力亦較為恰當。

關鍵詞彙：GARCH，厚尾，波動性預測

## 壹 · 前言

面對瞬息萬變的金融市場，一般投資大眾在追求高報酬的投資標的時，卻往往忽視其潛在的風險。財務上，Markowitz (1952) 首先提出以資產報酬率的變異數或波動性作為衡量風險的指標。隨著全球金融市場的蓬勃發展，資產價格波動性的預測攸關決策者在投資組合的管理、避險策略的決定、或衍生性金融商品的定價。事實上，波動性的預測是相當困難的。單就模型本身的預測能力而言，當使用不同樣本、不同期間或不同資料頻率，經常會得到不盡相同的結果。甚至不同的績效衡量準則，亦可能導致模型間相對預測能力的優劣順序發生改變 (Armstrong and Collopy, 1992； Makridakis, 1993； Brailsford and

---

\* 作者簡介：李命志，淡江大學財務金融系副教授；洪瑞成，元培科技大學財務金融系講師；劉洪鈞，淡江大學財務金融研究所博士班研究生。

Faff, 1996)。因此，如果能更精準地將波動性過程模型化，同時提升模型對波動性預測的能力，將使得資產配置與風險管理更有效率。

一般資產報酬率具有波動性叢聚 (volatility clustering) 的現象 (Mandelbrot, 1963; Akgiray, 1989)，亦即大波動伴隨著大波動，小波動伴隨著小波動。Engle (1982) 考慮波動性的動態現象，提出自我迴歸條件異質變異數模型 (autoregressive conditional heteroskedastic model; ARCH)，可以有效描述此一現象。但其模型假設誤差項分配為 i.i.d 且服從標準常態分配，並無法捕捉到絕大多數的金融資產報酬率序列呈現高狹峰 (leptokurtic)、厚尾 (fat-tailed) 的特性。Bollerslev (1987) 提出 GARCH 模型 (generalized autoregressive conditional heteroskedastic model; GARCH)，其假設誤差項服從 t 分配，能有效解決厚尾的問題，但由於 t 分配本身峰態相對較低，亦無法滿足金融性資產報酬率高狹峰的特性。Nelson (1991) 提出 GED 分配 (generalized error distribution; GED) 與 Politis (2004) 提出之 HT<sup>1</sup> 分配 (heavy tailed distribution; HT) 皆能充分地描繪高峰、厚尾的性質。

Politis (2004) 實證研究中，先將資料分成前後兩部分，以前半部樣本資料作為估計期間來預測整個後半部樣本的波動性，然而一般探討波動性預測能力的文獻多採用移動視窗的方式比較模型的優劣。因此，本文以 GARCH(1,1) 模型為主，並假設其誤差項分別服從標準常態分配、GED 分配、HT 分配，針對美國道瓊工業股價指數、S&P500 股價指數、NASDAQ 股價指數、美國西德州中級原油現貨價格 (WTI crude oil)、英國倫敦布朗特原油現貨價格 (Brent Europe) 等五種資產之日資料進行實證研究，改採移動視窗的估計方式進行波動性預測，並以 DM 檢定來探討在不同誤差項分配假設下之 GARCH(1,1) 模型對於樣本外波動性的相對預測能力。

本文的實證分析研究進行步驟如下：首先，我們計算不同預測模型的樣本外均方誤差 (MSE)，藉以初步掌握不同模型之預測能力。接著利用 DM 檢定 (Diebold and Mariano, 1995) 對預測模型進行相對預測能力之比較 (pairwise comparison)。由於採用不同的損失方程式 (loss function) 評估預測績效時，最佳模型的決定對不同評估方法的選取是敏感的，亦即以不同的評估準則，可能會得到不一致的結果 (Brailsford and Faff, 1996)。因此，我們加入平均絕對誤差 (MAE) 作為另一評估準則，比較其績效是否與 DM 檢定之結論一致。為了避免極端值可能對模型預測能力的優劣順序造成影響，我們先將樣本

---

<sup>1</sup> Politis (2004) 提出修正誤差項分配之 GARCH 模型 (GARCH model with normalizing and variance-stabilizing transformation)。

外的報酬率觀察值當中，偏離樣本外平均報酬率 3 個標準差之觀察值移除後，再重複進行上述步驟，以求實證分析的嚴謹。本文研究架構如下：第二節為文獻回顧；第三節說明本文之研究方法；第四節為實證結果分析與探討，最後則是結論及建議。

## 貳·文獻回顧

資產報酬率的波動性代表某段時間內資產報酬率的變異程度。然而金融資產價格的波動性一直是學者所熱衷探討的問題。一般波動性的預測模型大致可以區分為隱含波動性模型與時間序列模型。隱含波動性模型的觀念是利用選擇權市價代回理論評價模型來反推其隱含波動率 (implied volatility)；而時間序列預測模型則是以過去時間序列資料為基礎，將市場波動性的動態過程予以特性化。因為隱含波動率無法同時被使用在衍生性商品的定價，因此目前預測模型仍以時間序列模型為主。

傳統的時間序列模型通常假設資產報酬率的波動是隨機、呈常態分配且變異數固定不變，亦即假設誤差項的變異數為同質變異 (Homoscedasticity)。Mandelbrot (1963)、Fama (1965) 的實證研究中，均發現股票價格變動的分配具有高狹峰 (leptokurtic)、厚尾 (fat-tailed) 的特性，且其價格的變化具有前後相關的現象，此即財務上之「波動性叢聚」現象。Engle (1982) 提出 ARCH 模型，假設條件變異數會受到前期誤差項平方的影響，隱含條件變異數為與時俱變 (time varying)，並以英國的通貨膨脹率為實證對象，結果指出 ARCH 模型對於時間序列資料的條件平均數以及條件變異數而言，其估計結果比傳統的 OLS 模型表現還要好，且有效捕捉報酬率的波動性群聚現象。

Bollerslev (1986) 將 ARCH 模型推廣，提出 GARCH 模型。由於傳統 ARCH 模型受限於誤差項服從標準常態分配，Bollerslev (1987) 假設報酬率序列的誤差項服從  $t$  分配，提出 GARCH- $t$  模型，便適度的解決厚尾的問題。但由於  $t$  分配本身的峰態較低，仍無法滿足金融性資產報酬率高狹峰的特性。

呂文正 (1998) 採用 ARCH-family 包含 ARCH-M(4)、GARCH(1,1)、EGARCH(1,1)、TARCH-M(1,1)，接著引入 SWARCH 模型探討模型於樣本內及樣本外之預測能力。以認購權證 (對應之標的個股) 為研究對象，取群益 01 (台塑)、金鼎 01 (中環)、元大 01 (開發) 之日資料，以 MSE、MAE、LE2、|LE| 作為預測績效比較準則。實證指出樣本外預測，當假設殘差服從  $t$  分配較常態下所得到的預測誤差小，顯示  $t$  分配較符合厚尾的特性。

黃弘文 (1998) 研究香港恆生指數期貨上市，分析其對恆生股價指數的影響，藉以推測國內股價指數期貨推出後對現貨市場的可能影響。其研究採用 Gaussian-GARCH、GARCH-GED 模型作比較。實證結果指出自期貨交易開始後，以 Gaussian-GARCH 模型估計之恆生指數波動反而減少；但以 GARCH-GED 模型卻得到相反的結論。不過在期貨開始交易後，香港恆生指數之日報酬波動確實增加。因此 GARCH-GED 模型確實能有效捕捉大部分的金融資產報酬率呈現高峰、厚尾的特性。

Politis (2004) 以 S&P500 股價指數、日圓兌美元匯率及 IBM 個股股價等日資料，以他提出具有厚尾特性的 GARCH-HT 模型分別與 Gaussian GARCH 模型與 GARCH-t 模型對日報酬率的平方進行預測比較，以絕對值均方誤差 (mean absolute deviation; MAD) 做為預測能力優劣的比較準則，實證結果指出由於 GARCH-HT 模型之誤差項分配同時具備描繪高峰、厚尾的優勢，故對於日報酬率平方的預測能力明顯優於傳統 Gaussian GARCH 模型和 GARCH-t 模型。

Akgiray (1989) 以 1963 年 1 月至 1986 年 12 月的 CRSP 股價指數日報酬率，透過歷史波動性模型、指數加權移動平均模型、ARCH 模型及 GARCH 模型進行樣本外預測能力比較。實證結果指出以 GARCH 模型的表現最佳。此外，GARCH(1,1)模型經由逐日預測 (one-step ahead prediction) 股價報酬波動的效果比 ARCH(2)恰當。

Andersen, et al. (1998) 以德國馬克兌美元匯率與日幣兌美元匯率的日報酬率做為研究對象，資料期間選取 1987 年 10 月到 1992 年 9 月為樣本內期間，1992 年 10 月到 1993 年 9 月作為樣本外期間，並使用 GARCH(1,1)以及隨機波動模型 (stochastic volatility model) 作為預測模型，以均方誤差 (mean square error; MSE) 做為預測能力的比較準則。儘管 GARCH 模型的樣本內參數估計值都很顯著，但是對於樣本外日報酬率平方的預測卻不如隨機波動模型來得好。Heynen, et al. (1994) 針對 7 國股價指數與 5 國外匯報酬分別以隨機漫步模型 (random walk model)、GARCH(1,1)、EGARCH(1,1) 與隨機波動模型進行波動性預測能力比較。結果顯示隨機波動性模型最能捕捉股價指數波動性；而 GARCH(1,1) 模型對外匯報酬波動性具有最佳的預測能力。亦即不同資產應以不同的預測模型來配適。國內吳佳貞 (1998) 則利用台灣股價指數與美元兌新台幣匯率，比較在不同預測水平下，此 4 種模型預測能力之優劣。實證結果指出不論是股價指數或是匯率，隨機波動模型對於長天期或是短天期的預測效果均優於其他 3 種模型，與 Heynen, et al. (1994) 結論並不一致。

絕大部分的金融性資產報酬率普遍具有高狹峰、厚尾的現象。此外，還具有一些特性，如自我相關以及波動性叢聚等特性。Bollerslev, et al. (1992) 提出 GARCH(1,1)模型的設定，除了具備精簡的原則之外，且在波動性的預測上具有良好的表現。本文的實證資料除了股價指數外，亦加入了原油作為探討的對象。Sadorsky (2006) 在能源商品方面的實證研究當中，指出 GARCH(1,1)模型對於原油日資料的波動性具有非常好的預測能力。因此，本文採取 GARCH(1,1)模型，一方面能有效捕捉報酬率的自我相關以及波動性叢聚等特性。二方面，GED 與 HT 分配則用以刻劃資產報酬率的高狹峰與厚尾現象。當本文著重在於探討報酬率分配厚尾的程度，故沒有將隨機波動模型納入作一併的探討。

波動性的預測，應用於實務上，如風險管理有極大的影響，Christoffersen and Diebold (2000) 研究中提到，模型對波動性預測的準確性隨著預測水平的提高而迅速的遞減。如此，對長天期波動性預測將非常不準確。本研究兼顧學術與實務應用，除了探討一天期的波動性預測外，亦針對長天期的波動性預測進行比較與分析。如此，更能增加本文實證結果的穩健性。

綜合以上研究結果，當 GED 分配與 HT 分配皆能有效捕捉高峰、厚尾的性質，本文嘗試假設 GARCH(1,1)模型的誤差項分配分別服從標準常態、GED、HT 分配，亦即 Gaussian GARCH、GARCH-GED、GARCH-HT 三種模型，則 GARCH-GED 模型與 GARCH-HT 模型對於日報酬率的平方之樣本外預測能力均能優於 Gaussian GARCH 模型是可以被預期的，而我們也將進一步檢驗 GARCH-HT 模型的預測能力是否也能優於 GARCH-GED 模型。

## 參・研究方法

本節首先針對 Gaussian GARCH、GARCH-GED 及 GARCH-HT 等 3 種模型作發展過程的概述與理論推導，說明各種誤差分配假設的特性，並以圖形比較其中之差異。第 2 節為估計方法。最後則是模型相對預測能力的檢定方法。

### 一、不同誤差項分配之 GARCH(1,1)模型

#### (一) Gaussian GARCH 模型

Bollerslev (1986) 修正了 ARCH 模型，並首先提出 GARCH 模型。他認為 GARCH 模型對於時間序列之條件變異數的設定彈性比 ARCH 模型為佳。雖

然 GARCH(p,q) 模型可以有許多不同的設定方式，但是一般而言認為 GARCH(1,1) 模型具有最精簡 (parsimonious) 的性質，而實證上亦多建議採用 GARCH(1,1) 模型做為條件變異數模型。令  $P_t$  表示標的資產股票在第  $t$  期的價格，將第  $t$  期的報酬率定義為  $r_t = (\ln P_t - \ln P_{t-1}) \times 100$ ，模型簡述如下：

$$r_t = \sqrt{\sigma_t} \cdot Z_t \quad (1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \cdot r_{t-1}^2 + \beta \cdot \sigma_{t-1}^2 \quad (2)$$

其中， $Z_t$  為 i.i.d 且服從  $N(0,1)$ ，參數  $\omega$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$  均為非負實數以保證條件變異數  $\sigma_t^2$  必為正；且滿足定態的條件為  $\alpha + \beta < 1$ 。在 GARCH 模型中，由於誤差項具有自我相關，若以 OLS 法來估計參數值的話將不具效率性，因此 GARCH 模型通常以最大概似估計法 (Maximum Likelihood Estimation；MLE)。Gaussian GARCH 之對數概似函數如下：

$$LL_N = \sum_{t=1}^T -\frac{1}{2} \left( \ln(2\pi) + \ln \sigma_t^2 + \frac{r_t^2}{\sigma_t^2} \right) \quad (3)$$

## (二) GARCH-GED 模型

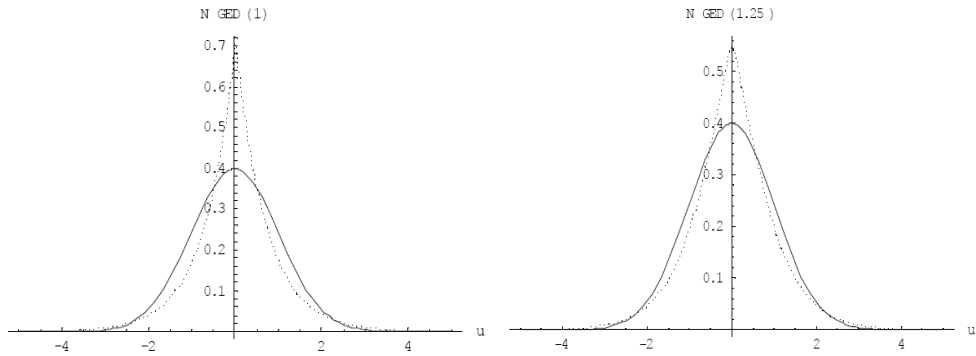
為了有效捕捉金融資產高峰厚尾的現象，Nelson (1991) 提出一般化誤差分配 (generalized error distribution；GED)。GED 分配之機率密度函數如下：

$$f(r_t) = \frac{v}{\lambda \cdot 2^{v+1/v} \cdot \Gamma(1/v)} \text{Exp} \left( -\frac{1}{2} \cdot \left| \frac{r_t}{\lambda \sqrt{\sigma_t^2}} \right|^v \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma_t^2}} \quad (4)$$

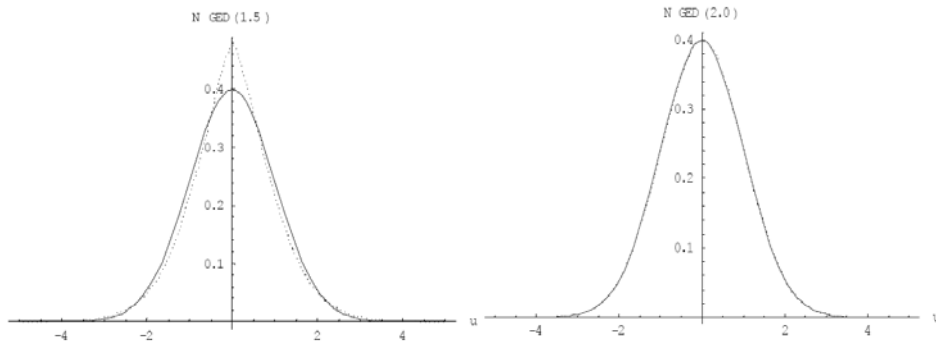
，其中  $\lambda = \sqrt{2^{-2/v} \cdot \Gamma(1/v) / \Gamma(3/v)}$ ，且  $0 < v < \infty$ ； $v$  為外型參數，決定分配的型態。一般而言，當  $v < 2$  時，分配較為厚尾 (thicker tail)；當  $v > 2$  時，分配較為細尾 (thinner tail)；當  $v = 2$  時，則變為常態分配 (此時， $\lambda = 1$ )。圖一為 GED 分配與標準常態分配的機率密度函數圖之比較，可以發現 GED 分配的峰度明顯比常態分配高許多，故 GED 分配能有效描繪金融性資產報酬率高狹峰的現象，且 GED 分配的尾端也比常態分配肥厚。GARCH-GED 之對數概似函數如下：

$$LL_{GED} = \sum_{t=1}^T \ln v - \ln \lambda - \frac{v+1}{v} \cdot \ln 2 - \ln \Gamma\left(\frac{1}{v}\right) - \frac{1}{2} \left| \frac{r_t}{\lambda \cdot \sqrt{\sigma_t^2}} \right|^v - \frac{1}{2} \ln \sigma_t^2 \quad (5)$$

，其中  $\lambda = \text{Exp} \left[ -\frac{1}{v} \cdot \ln 2 + \frac{1}{2} \cdot \ln \Gamma\left(\frac{1}{v}\right) - \frac{1}{2} \cdot \ln \Gamma\left(\frac{3}{v}\right) \right]$ 。



a.標準常態分配 (實線) vs. GED( $\nu=1$ ) (虛線) b.標準常態分配(實線) vs. GED( $\nu=1.25$ ) (虛線)



c.標準常態分配(實線) vs. GED( $\nu=1.5$ ) (虛線) d.標準常態分配(實線) vs. GED( $\nu=2$ ) (虛線)

圖一 標準常態分配與 GED 分配機率密度函數分配圖之比較

### (三)GARCH-HT模型

Politis (2004) 提出一個修正後的 GARCH-HT 模型，實證結果發現在資產報酬率具有高峰態與厚尾的情況下，此模型對於日報酬率平方的估計效果較 Gaussian GARCH 模型和 GARCH-t 模型為佳。原始的 ARCH 模型設定如：

$$r_t = Z_t \sqrt{a + \sum_{i=1}^p a_i r_{t-i}^2} \quad (6)$$

其中誤差項  $Z_t$  為 i.i.d 且服從  $N(0,1)$ 。則可以推得殘差項如(7)式：

$$\hat{Z}_t = \frac{r_t}{\sqrt{\hat{a} + \sum_{i=1}^p \hat{a}_i r_{t-i}^2}} \quad (7)$$

其中，在原始 ARCH 的假設下， $\hat{Z}_t$  應為 i.i.d.的標準常態隨機變數，且  $\hat{a}, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots$  為  $a, a_1, a_2, \dots$  的非負估計值。令  $K_1^j(Y)$  為樣本  $\{Y_1, Y_{i+1}, \dots, Y_j\}$  的峰態，一般而言殘差序列的峰態係數會比樣本本身的峰態係數小，但是殘差序列的峰態係數依然會大於 3，即  $3 < K_1^n(\hat{Z}) < K_1^n(r)$ 。一般來說，通常不存在特定的  $\hat{a}, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots$  使得殘差序列之峰態  $K_1^n(\hat{Z})$  約等於 3。若將  $r_t^2$  加進第(7)式的分母，則：

$$\hat{W}_t = \frac{r_t}{\sqrt{\hat{a} + \hat{a}_0 r_t^2 + \sum_{i=1}^p \hat{a}_i r_{t-i}^2}} \quad (8)$$

(8)亦是(9)式的估計式：

$$X_t = W_t \cdot \sqrt{a + a_0 r_t^2 + \sum_{i=1}^p a_i r_{t-i}^2} \quad (9)$$

如此(9)式中存在一組特定的  $\hat{a}, \hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots$ ，使得新殘差項  $\hat{W}_t$  的峰態係數約等於 3 (Politis, 2004)。故可以假設(9)式中的  $W_t$  為平均數為 0 的常態分配。將(9)式改寫如下：

$$r_t = U_t \sqrt{a + \sum_{i=1}^p a_i r_{t-i}^2} \quad (10)$$

其中，

$$U_t = \frac{W_t}{\sqrt{1 - a_0 W_t^2}} \quad (11)$$

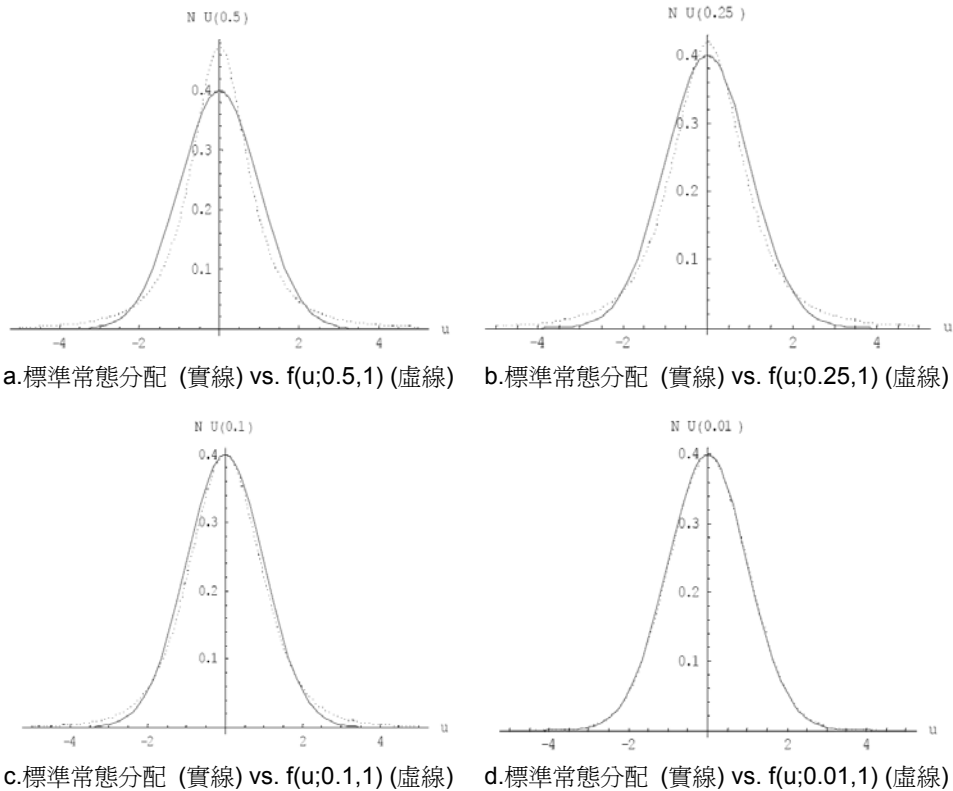
則(10)式與傳統 ARCH(p)模型的形式相同，差別只在於  $U_t$  並非完全服從標準常態分配。但  $U_t$  將使得第(10)式的 ARCH 模型服從  $f(u; a_0, 1)$  分配，並使



用(12)式來表示 ARCH 誤差項的分配 (以下我們皆以 HT 來表示  $f(u; a_0, 1)$  分配) :

$$f(u; a_0, 1) = \frac{(1 + a_0 u^2)^{-1.5} \exp\left\{-\frac{u^2}{2(1 + a_0 u^2)}\right\}}{\sqrt{2\pi}(\Phi(a_0^{-0.5}) - \Phi(-a_0^{-0.5}))} \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad (12)$$

$f(u; a_0, 1)$  當中, 1 表示分配的標準差、 $a_0$  表示外型參數 ( $0 < a_0 < 1$ )、 $\Phi$  表示標準常態分配的累積機率密度函數。圖二為外型參數  $a_0 = 0.5$ 、 $0.25$ 、 $0.1$  及  $0.01$  時,  $f(u; 0.1, 1)$  機率分配圖形, 並且與標準常態分配做比較。由圖二可以看出  $f(u; 0.1, 1)$  分配較標準常態分配更能有效捕捉厚尾的特性, 且  $f(u; a_0, 1)$  分配之峰度亦比常態來的高。當  $a_0 \rightarrow 0$  時,  $f(u; a_0, 1)$  會近似於標準常態分配。當外型參數  $a_0$  愈大時, 誤差項分配的厚尾程度亦隨之增加, 因此  $f(u; a_0, 1)$  可以描繪厚尾的性質。

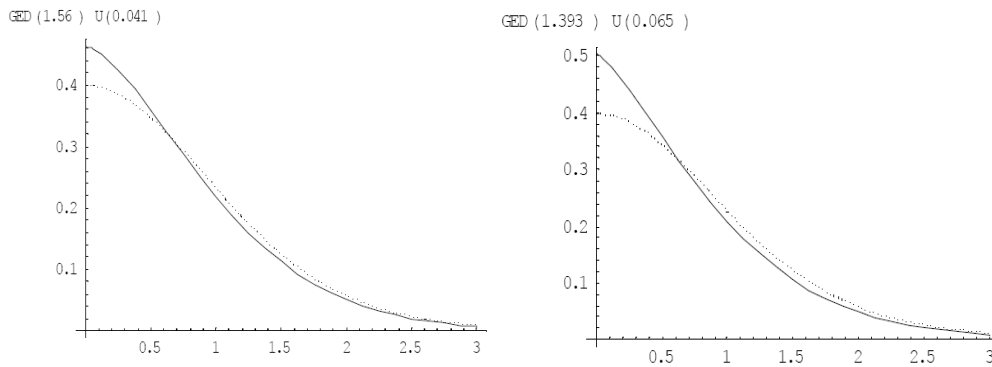


圖二 標準常態分配與  $f(u; a_0, 1)$  機率密度函數分配圖之比較

爲了比較 GED 分配與  $f(u; a_0, 1)$  分配之間的差異，我們以圖三對此兩種皆具厚尾特性的分配作簡單的描述與說明。圖三當中，GED 分配之參數  $\nu$  與  $f(u; a_0, 1)$  分配之參數  $a_0$  選取方式爲實證資料所估計出來的參數<sup>2</sup>。由圖三發現，GED 分配的峰態較  $f(u; a_0, 1)$  分配高，但厚尾的程度不如  $f(u; a_0, 1)$  分配；而另一方面， $f(u; a_0, 1)$  分配則較能夠捕捉厚尾性質。因此，GED 分配與  $f(u; a_0, 1)$  分配皆較常態分配高峰且厚尾。GED 分配與  $f(u; a_0, 1)$  分配則分別在高峰、厚尾程度上各擅所長。

GARCH-HT 之對數概似函數如下：

$$LL_{HT} = \sum_{t=1}^T -\frac{1}{2} \left[ 3 \cdot \ln(1 + a_0 \cdot (u/\sigma_t)^2) + \ln 2\pi + 2 \ln(\Phi(a_0^{-0.5}) - \Phi(-a_0^{-0.5})) + \ln \sigma_t^2 + \frac{(u/\sigma_t)^2}{1 + a_0 \cdot (u/\sigma_t)^2} \right] \quad (13)$$



a. GED ( $\nu=1.56$ ) (實線) vs.  $f(u; 0.041, 1)$  (虛線) b. GED ( $\nu=1.393$ ) (實線) vs.  $f(u; 0.065, 1)$  (虛線)

圖三 GED 分配與  $f(u; a_0, 1)$  機率密度函數分配圖之比較

## 二、樣本外預測

GARCH(1,1)模型的樣本外一期預測如下：令  $\Omega_t$  爲包含前  $t$  期的所有資訊集合，則：

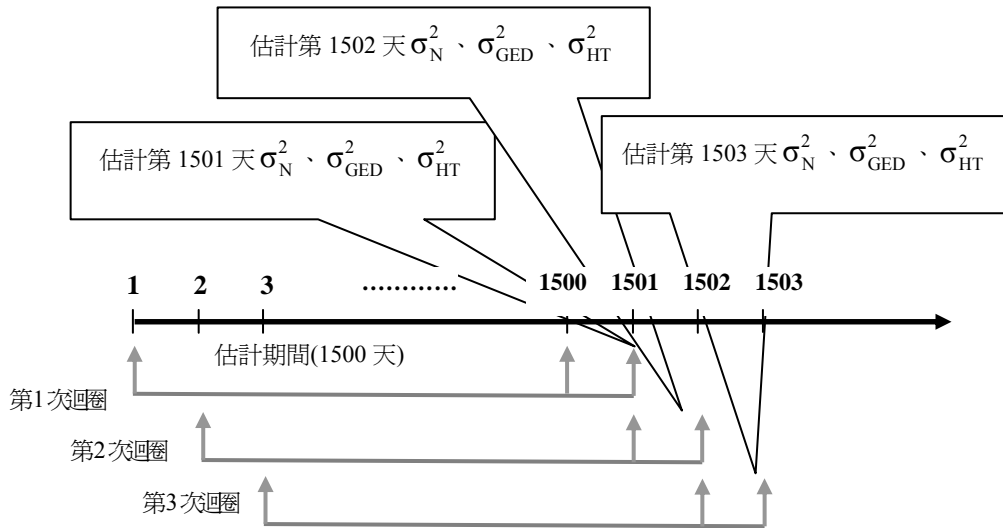
$$\begin{aligned} E(\sigma_{t+1}^2 | \Omega_t) &= E(\omega + \alpha \cdot r_t^2 + \beta \cdot \sigma_t^2 | \Omega_t) \\ &= \omega + \alpha \cdot E(r_t^2 | \Omega_t) + \beta \cdot E(\sigma_t^2 | \Omega_t) \end{aligned}$$

<sup>2</sup> 圖三(a)與三(b)之參數分別取自道瓊工業股價指數、布朗特原油現貨價格所估計之結果。

$$= \omega + (\alpha + \beta) \cdot \sigma_t^2$$

$$\Rightarrow \sigma_{t+1}^2 = \hat{\omega} + (\hat{\alpha} + \hat{\beta}) \cdot \sigma_t^2 \tag{14}$$

則以(14)式來預測樣本外一天之條件變異數  $\sigma_{t+1}^2$ 。我們利用圖四來說明移動視窗 (rolling window) 的預測方式。假設共有 T 筆資料，R 表示樣本內之觀察值個數，P 表示樣本外觀察值個數 (T=R+P)，以 1 ~R 筆觀察值作為估計期間，用來預測第 R+1 天的條件變異數；以 2 ~R+1 筆觀察值來預測第 R+2 天的條件變異數；以 R~R+P-1 筆觀察值來預測第 R+P 天的條件變異數。本文之估計期間 R 等於 1500 天，而滾動次數 P 為 250 次。



圖四 樣本外一天預測 (one-step ahead prediction) 移動視窗法

### 三、波動性預測與績效評估方法

#### (一)波動性預測

當真實波動性無法事先觀察到的情況下，我們必須使用能替代真實波動性且不偏 (unbiased measure of volatility) 的衡量指標，因此本文採用日報酬率的平方作為真實的波動性的代理變數。Awartani and Corradi (2005) 提出當損失函數為二次式時 (MSE)，使用報酬率的平方代替真實波動度，仍能保持模

型預測能力的優劣順序。本節將對此一論點說明如下：令  $\Omega_{t-1}$  為包含前  $t-1$  期的所有資訊集合。假設  $E(r_t | \Omega_{t-1})=0$ 、 $E(r_t^2 | \Omega_{t-1})=\sigma_t^{2+}$ ，其中  $\sigma_t^{2+}$  表示第  $t$  期股票價格之真實條件變異數。令  $\sigma_{A,t}^2$ 、 $\sigma_{B,t}^2$  分別表示由兩個 GARCH(1,1) 模型 A 與 B 所估計出來第  $t$  期之條件變異數。若波動度過程為定態 (covariance stationary)，則  $E(\sigma_t^{2+})^2$ 、 $E(\sigma_{A,t}^2)^2$ 、 $E(\sigma_{B,t}^2)^2$  為有限的常數 (finite constant)，且非條件四階動差  $E(r_t - E(r_t | \Omega_{t-1}))^4$  亦為有限。當忽略參數估計之誤差，亦即假定  $E(\sigma_{A,t}^2)^2$ 、 $E(\sigma_{B,t}^2)^2$  為已知，且由大數法則：

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [(\sigma_t^{2+} - \sigma_{A,t}^2)^2 - (\sigma_t^{2+} - \sigma_{B,t}^2)^2] \xrightarrow{p} E((\sigma_t^{2+} - \sigma_{A,t}^2)^2 - (\sigma_t^{2+} - \sigma_{B,t}^2)^2) \quad (15)$$

若  $E(\sigma_t^{2+} - \sigma_{A,t}^2)^2 < E(\sigma_t^{2+} - \sigma_{B,t}^2)^2$ ，表示當使用二次損失函數 (MSE) 為準則時，模型 A 對於標的資產波動度的預測優於模型 B。現以  $r_t^2$  (報酬率的平方) 代替  $\sigma_t^{2+}$  (真實波動度)，則

$$\begin{aligned} E(r_t^2 - \sigma_{A,t}^2)^2 &= E[(r_t^2 - \sigma_t^{2+}) - (\sigma_{A,t}^2 - \sigma_t^{2+})]^2 \\ &= E(r_t^2 - \sigma_t^{2+})^2 + E(\sigma_{A,t}^2 - \sigma_t^{2+})^2 - 2E[(r_t^2 - \sigma_t^{2+})(\sigma_{A,t}^2 - \sigma_t^{2+})] \\ &= E(r_t^2 - \sigma_t^{2+})^2 + E(\sigma_{A,t}^2 - \sigma_t^{2+})^2 \end{aligned}$$

(當給定  $(r_t^2 - \sigma_t^{2+})$  與  $\Omega_{t-1}$  之可測函數無關,  $\forall t$ )

同理， $E(r_t^2 - \sigma_{B,t}^2)^2 = E(r_t^2 - \sigma_t^{2+})^2 + E(\sigma_{B,t}^2 - \sigma_t^{2+})^2$ 。則

$$\begin{aligned} &\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [(r_t^2 - \sigma_{A,t}^2)^2 - (r_t^2 - \sigma_{B,t}^2)^2] \\ &\xrightarrow{p} E[(r_t^2 - \sigma_{A,t}^2)^2 - (r_t^2 - \sigma_{B,t}^2)^2] \\ &= E(r_t^2 - \sigma_{A,t}^2)^2 - E(r_t^2 - \sigma_{B,t}^2)^2 \\ &= [E(r_t^2 - \sigma_t^{2+})^2 + E(\sigma_{A,t}^2 - \sigma_t^{2+})^2] - [E(r_t^2 - \sigma_t^{2+})^2 + E(\sigma_{B,t}^2 - \sigma_t^{2+})^2] \\ &= E(\sigma_{A,t}^2 - \sigma_t^{2+})^2 - E(\sigma_{B,t}^2 - \sigma_t^{2+})^2 = E(\sigma_t^{2+} - \sigma_{A,t}^2)^2 - E(\sigma_t^{2+} - \sigma_{B,t}^2)^2 \end{aligned}$$

故  $E(\sigma_{A,t}^2 - \sigma_t^{2+})^2 - E(\sigma_{B,t}^2 - \sigma_t^{2+})^2 < 0$  表示，當使用日報酬率的平方來代替真實波動度時，仍能保持模型預測能力的優劣順序。

## (二)DM檢定

本文藉由 Diebold and Mariano (1995) 提出之 DM 檢定，對不同預測模型之間的相對預測能力進行比較，而 DM 檢定之虛無假設與對立假設分述如下：

$$H_0: E((r_{t+1}^2 - \sigma_{A,t+1}^2)^2 - (r_{t+1}^2 - \sigma_{B,t+1}^2)^2) = 0$$

$$H_1: E((r_{t+1}^2 - \sigma_{A,t+1}^2)^2 - (r_{t+1}^2 - \sigma_{B,t+1}^2)^2) \neq 0$$

其中， $\sigma_{A,t+1}^2$  與  $\sigma_{B,t+1}^2$  分別表示表示模型 A 與模型 B 之條件變異數。而 DM 檢定統計量如下：

$$DM_p = \frac{1}{\sqrt{P} \cdot \mathcal{S}_p} \sum_{t=R}^{T-1} ((r_{t+1}^2 - \mathcal{S}_{A,t+1}^2)^2 - (r_{t+1}^2 - \mathcal{S}_{B,t+1}^2)^2) \quad (16)$$

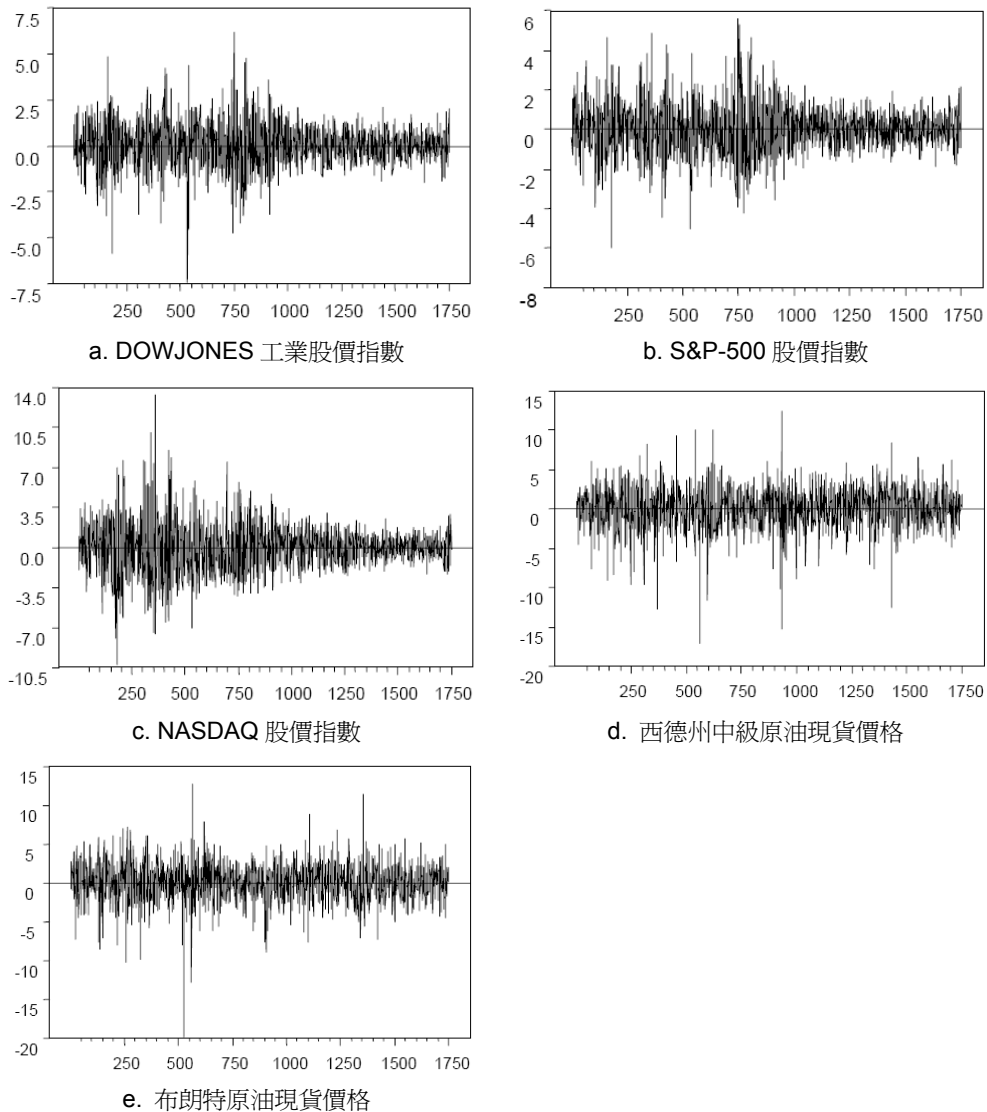
其中， $\mathcal{S}_p^2$  表示自我相關異質變異穩健共變異估計子 (heteroskedasticity and autocorrelation robust covariance estimator；HAC)，且

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_p^2 = & \frac{1}{P} \sum_{t=R}^{T-1} \left[ (r_{t+1}^2 - \mathcal{S}_{A,t+1}^2)^2 - (r_{t+1}^2 - \mathcal{S}_{B,t+1}^2)^2 \right]^2 \\ & + \frac{2}{P} \sum_{\tau=1}^{l_p} w_\tau \sum_{t=R+\tau}^{T-1} \left[ (r_{t+1}^2 - \mathcal{S}_{A,t+1}^2)^2 - (r_{t+1}^2 - \mathcal{S}_{B,t+1}^2)^2 \right] \\ & \left[ (r_{t+1-\tau}^2 - \mathcal{S}_{A,t+1-\tau}^2)^2 - (r_{t+1-\tau}^2 - \mathcal{S}_{B,t+1-\tau}^2)^2 \right] \end{aligned} \quad (17)$$

其中， $w_\tau = 1 - \tau / (l_p - 1)$ 、 $l_p = o(P^{-1/4})$ 。

由於考量到報酬率的平均數可能不為零的情況或者存在自我相關現象，因此本文在實證估計時，另外加入了  $E(r_t | \Omega_{t-1}) = \mu$  與  $E(r_t | \Omega_{t-1}) = \mu + \phi r_{t-1}$  兩種平均數方程式的設定，藉以檢視波動性的預測是否會受到這些因素的影響。

## 肆・實證結果與分析



圖五 日資料報酬率之時間序列圖

本文採用美國道瓊工業股價指數、S&P500 股價指數、NASDAQ 股價指數、西德州中級原油現貨價格 (West Texas Intermediate crude oil; WTI)、布朗特原油現貨價格 (Brent Europe crude oil) 進行實證分析，資料型態為日資料。美國道瓊工業股價指數、S&P500 股價指數及 NASDAQ 股價指數之樣本期間皆為 1999 年 8 月 1 日至 2006 年 6 月 30 日，各 1751 筆，取自台灣經濟新報資料庫 (TEJ) 及 Yahoo Finance 網站。西德州中級原油現貨價格樣本期間為 1999

年 7 月 5 日至 2006 年 6 月 30 日，布朗特原油現貨價格樣本期間為 1999 年 9 月 2 日至 2006 年 6 月 30 日，各 1751 筆，取自美國能源情報署 (Energy Information Administration, EIA)。日報酬率的計算方式採取對數差分後再乘以 100，即  $r_t = (\ln P_t - \ln P_{t-1}) \times 100$ ，其中  $r_t$  表示日報酬率， $P_t$  表示第  $t$  期之股價指數 (或原油現貨價格)。5 種日資料報酬率之時間序列如圖五所示。

表一 日報酬率之基本統計量

	DOWJONES	S&P500	NASDAQ	WTI-OIL	BRENT-OIL
平均值	0.002646	-0.002546	-0.011122	0.075391	0.072106
標準差	1.118982	1.155147	1.957889	2.511006	2.404893
偏態係數	-0.04025	0.11562**	0.18671***	-0.60518***	-0.51445***
峰態係數	3.55324***	2.33660***	3.55584***	3.89674***	4.41290***
最大值	6.154722	5.574432	13.254645	12.442533	12.853403
最小值	-7.396143	-6.004513	-10.168411	-17.091786	-19.890648
JB	920.558***	401.773***	931.595***	1213.335***	1496.293***
$Q^2(12)$	583.914***	686.234***	954.131***	109.360***	94.569***

附註：1. 峰態係數為超額峰態係數 (Excess Kurtosis)。2. JB 為 Jarque-Bera 之常態分配檢定。  
3.  $Q^2(12)$  為落階 12 期之 Ljung-Box Q 檢定統計量。4. \*、\*\*、\*\*\* 分別表示 10%、5% 與 1% 之顯著水準。

表一列出此 5 種實證資料日報酬的基本統計量。由表中可知，S&P500 股價指數與 NASDAQ 股價指數之平均日報酬率為負，其餘均為正。由偏態係數可知，S&P500 股價指數及 NASDAQ 股價指數之日報酬率呈現右偏，其餘皆為左偏。而 5 種資料日報酬率之超額峰態係數皆顯著大於 0，顯示日報酬率為高狹峰、呈現厚尾現象，尤以布朗特原油最為明顯。再者，由 Jarque-Bera 常態性檢定，可以發現所有資料均顯著拒絕日報酬率為常態分配之假設，故皆適合作為研究的對象。由 Ljung-Box Q 檢定統計量，報酬率平方的序列存在強烈的自我相關現象，具有顯著的波動性叢聚效果，支持本研究使用 GARCH 模型的適切性。

表二為美國道瓊工業股價指數、S&P500 股價指數、NASDAQ 股價指數、西德州中級原油現貨價格、布朗特原油現貨價格的樣本內估計結果。其中，參數限制如下： $\omega$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$  皆為非負實數， $\alpha + \beta < 1$  以滿足定態的性質， $a_0$  的範圍為  $0 < a_0 < 1$ ，參數  $\nu$  的限制為  $\nu > 0$ 。

表二 不同條件平均數方程式設定之樣本外預測第一次參數估計結果

模型	參數	DOWJONES	S&P500	NASDAQ	WTI-OIL	BRENT-OIL
<b>Panel A.</b> $E(r_t   \Omega_{t-1}) = 0$						
GARCH-N	$\omega$	0.033(0.003)***	0.054(0.003)***	0.152(0.005)***	1.628(0.054)***	0.712(0.029)***
	$\alpha$	0.105(0.004)***	0.124(0.006)***	0.140(0.006)***	0.117(0.008)***	0.091(0.004)***
	$\beta$	0.872(0.003)***	0.841(0.004)***	0.823(0.005)***	0.639(0.008)***	0.794(0.005)***
	Log-V	-2223.78	-2295.29	-3025.85	-3520.21	-3451.22
GARCH-GED	$\omega$	0.032(0.004)***	0.043(0.004)***	0.106(0.007)***	1.069(0.063)***	0.632(0.038)***
	$\alpha$	0.099(0.006)***	0.111(0.006)***	0.124(0.006)***	0.082(0.010)***	0.076(0.017)***
	$\beta$	0.879(0.004)***	0.862(0.005)***	0.852(0.005)***	0.754(0.010)***	0.819(0.013)***
	$\nu$	1.561(0.079)***	1.532(0.062)***	1.565(0.078)***	1.340(0.053)***	1.393(0.065)***
	Log-V	-2211.92	-2281.71	-3014.10	-3482.08	-3419.62
GARCH-HT	$\omega$	0.027(0.006)***	0.022(0.003)***	0.014(0.004)***	0.418(0.027)***	0.363(0.025)***
	$\alpha$	0.080(0.013)***	0.078(0.004)***	0.068(0.003)***	0.038(0.004)***	0.046(0.004)***
	$\beta$	0.884(0.016)***	0.891(0.004)***	0.921(0.003)***	0.861(0.006)***	0.860(0.005)***
	$a_0$	0.041(0.008)***	0.046(0.007)***	0.040(0.004)***	0.072(0.009)***	0.065(0.008)***
	Log-V	-2209.43	-2277.069	-2992.45	-3473.55	-3410.42
<b>Panel B.</b> $E(r_t   \Omega_{t-1}) = \mu$						
GARCH-N	$\mu$	0.013(0.023)	0.012(0.026)	0.036(0.035)	0.141(0.062)**	0.174(0.059)***
	$\omega$	0.034(0.004)***	0.054(0.003)***	0.154(0.012)***	1.632(0.054)***	0.686(0.126)***
	$\alpha$	0.106(0.004)***	0.125(0.006)***	0.142(0.007)***	0.123(0.008)***	0.096(0.015)***
	$\beta$	0.871(0.004)***	0.841(0.004)***	0.821(0.005)***	0.633(0.009)***	0.793(0.027)***
	Log-V	-2223.61	-2295.18	-3025.43	-3517.69	-3447.09
GARCH-GED	$\mu$	0.014(0.022)	0.018(0.024)	0.054(0.035)	0.197(0.064)***	0.178(0.052)***
	$\omega$	0.032(0.003)***	0.043(0.009)***	0.108(0.020)***	1.088(0.063)***	0.610(0.154)***
	$\alpha$	0.100(0.005)***	0.112(0.016)***	0.126(0.015)***	0.088(0.010)***	0.082(0.018)***
	$\beta$	0.878(0.004)***	0.861(0.018)***	0.850(0.018)***	0.745(0.010)***	0.817(0.034)***
	$\nu$	1.560(0.076)***	1.528(0.068)***	1.552(0.064)***	1.318(0.053)***	1.386(0.061)***
	Log-V	-2211.73	-2281.44	-3013.07	-3476.51	-3414.73
GARCH-HT	$\mu$	0.011(0.023)	0.013(0.024)	0.050(0.036)	0.191(0.058)***	0.175(0.054)***
	$\omega$	0.027(0.003)***	0.022(0.003)***	0.014(0.004)***	0.480(0.039)***	0.367(0.117)***
	$\alpha$	0.081(0.004)***	0.078(0.004)***	0.069(0.003)***	0.044(0.012)***	0.051(0.012)***
	$\beta$	0.883(0.005)***	0.891(0.004)***	0.920(0.003)***	0.839(0.024)***	0.853(0.034)***
	$a_0$	0.041(0.007)***	0.046(0.006)***	0.040(0.004)***	0.073(0.010)***	0.066(0.009)***
	Log-V	-2209.32	-2276.92	-2991.53	-3468.36	-3405.75
<b>Panel C.</b> $E(r_t   \Omega_{t-1}) = \mu + \phi r_{t-1}$						
GARCH-N	$\mu$	0.014(0.022)	0.012(0.027)	0.037(0.036)	0.146(0.064)**	0.167(0.056)***
	$\phi$	-0.027(0.026)	-0.026(0.025)	-0.030(0.027)	-0.022(0.030)	0.034(0.028)
	$\omega$	0.034(0.007)***	0.055(0.003)***	0.152(0.005)***	1.580(0.050)***	0.670(0.030)***
	$\alpha$	0.106(0.014)***	0.125(0.006)***	0.141(0.006)***	0.120(0.009)***	0.096(0.015)***
	$\beta$	0.871(0.015)***	0.840(0.004)***	0.822(0.005)***	0.643(0.008)***	0.796(0.011)***
	Log-V	-2223.11	-2294.70	-3024.81	-3517.39	-3446.37
GARCH-GED	$\mu$	0.017(0.023)	0.021(0.024)	0.055(0.035)	0.216(0.056)***	0.173(0.057)***
	$\phi$	-0.045(0.027)	-0.045(0.024)*	-0.013(0.027)	-0.049(0.029)*	0.020(0.026)
	$\omega$	0.032(0.004)***	0.043(0.009)***	0.108(0.006)***	1.014(0.059)***	0.602(0.040)***
	$\alpha$	0.100(0.005)***	0.112(0.005)***	0.127(0.007)***	0.083(0.009)***	0.082(0.008)***
	$\beta$	0.878(0.004)***	0.861(0.010)***	0.850(0.006)***	0.761(0.009)***	0.818(0.007)***
	$\nu$	1.542(0.065)***	1.511(0.065)***	1.557(0.034)***	1.304(0.051)***	1.389(0.054)***
	Log-V	-2210.25	-2279.97	-3012.95	-3474.62	-3414.42
GARCH-HT	$\mu$	0.012(0.023)	0.014(0.024)	0.050(0.038)	0.199(0.057)***	0.173(0.056)***
	$\phi$	-0.040(0.028)	-0.044(0.028)	-0.006(0.028)	-0.041(0.025)	0.011(0.026)
	$\omega$	0.027(0.003)***	0.022(0.003)***	0.014(0.005)***	0.446(0.029)***	0.366(0.027)***
	$\alpha$	0.080(0.004)***	0.078(0.003)***	0.069(0.002)***	0.042(0.005)***	0.051(0.005)***
	$\beta$	0.884(0.004)***	0.892(0.005)***	0.920(0.002)***	0.848(0.006)***	0.853(0.006)***
	$a_0$	0.042(0.007)***	0.047(0.006)***	0.040(0.004)***	0.075(0.009)***	0.065(0.009)***
	Log-V	-2208.15	-2275.50	-2991.50	-3467.04	-3405.64

附註：1. 括弧內之數據表示參數估計之標準誤 (standard error)。2. \*, \*\*, \*\*\* 分別表示具 10%、5%、1% 之顯著水準。3. Log-V 表示概似函數值。



表三列出以 Gaussian GARCH、GARCH-GED 及 GARCH-HT 三種模型逐日樣本外預測 250 筆資料之均方誤差 (mean squared error; MSE)。結果顯示，在不同的條件平均數方程式設定下，五種資料當中，GARCH-GED 模型與 GARCH-HT 模型的均方誤差皆小於 Gaussian GARCH 模型，其中又以 GARCH-HT 模型的均方誤差最小，因此對於樣本外一天的預測，可以發現 GARCH-HT 模型具有最小的均方誤差。

表三 各模型樣本外預測之均方誤差 (MSE)

	模型	cm(1)	cm(2)	cm(3)
DOWJONES	N	0.40718	0.40663	0.40635
	GED	0.40607	0.40544	0.40502
	HT	<b>0.39630</b>	<b>0.39584</b>	<b>0.39514</b>
S&P500	N	0.43955	0.43837	0.43721
	GED	0.43953	0.43810	0.43673
	HT	<b>0.43509</b>	<b>0.43405</b>	<b>0.43290</b>
NASDAQ	N	1.02409	1.02046	1.01985
	GED	1.02318	1.01927	1.01896
	HT	<b>1.02124</b>	<b>1.01789</b>	<b>1.01755</b>
WTI-OIL	N	37.63655	37.64126	37.52331
	GED	36.37836	36.48057	36.33888
	HT	<b>33.89892</b>	<b>33.89844</b>	<b>33.88217</b>
BRENT-OIL	N	28.88645	28.98035	29.00614
	GED	28.64463	28.74347	28.75660
	HT	<b>27.15109</b>	<b>27.22478</b>	<b>27.22649</b>

附註：cm(1)、cm(2)、cm(3)表示條件平均數方程式之設定分別為  $E(r_t|\Omega_{t-1}) = 0$ 、 $E(r_t|\Omega_{t-1}) = \mu$ 、 $E(r_t|\Omega_{t-1}) = \mu + \phi r_{t-1}$ 。

Inoue and Kilian (2005) 指出樣本外預測，均方誤差 (MSE) 僅提供了模型之間的概略性預測績效。當我們著重在比較模型之間的相對預測能力時，均方誤差並無法將模型之間的相對預測能力作完整的詮釋。故對兩兩模型進行 DM 檢定，藉以比較模型之間的相對預測能力。DM 檢定之結果列於表四。由表四發現，在五種實證資料當中，GARCH-GED 模型與 GARCH-HT 模型在不同條件平均數方程式假設下，對日報酬率平方的相對預測能力都比 Gaussian GARCH 模型佳。同樣能捕捉高峰、厚尾特性的 GARCH-HT 與 GARCH-GED 模型相比，GARCH-HT 模型的相對預測能力則優於 GARCH-GED 模型。而道

瓊股價指數方面，DM 檢定統計量大都具有 10% 的顯著水準；而對於兩種原油現貨價格而言，顯著水準都在 5% 以上。

表四 DM 檢定統計量

	模型	cm(1)	cm(2)	cm(3)
DOWJONES	N vs. GED	1.26738	1.33997*	1.42338*
	N vs. HT	1.61319*	1.58437*	1.57535*
	GED vs. HT	1.62693*	1.58656*	1.55775*
S&P500	N vs. GED	0.02214	0.51778	0.92421
	N vs. HT	0.95481	0.92219	0.89831
	GED vs. HT	1.04167	0.93747	0.86024
NASDAQ	N vs. GED	0.72536	0.95385	0.70179
	N vs. HT	0.44979	0.39646	0.35337
	GED vs. HT	0.36849	0.25362	0.26195
WTI-OIL	N vs. GED	2.88933***	2.62666***	2.71654***
	N vs. HT	2.46766***	2.37568***	2.33707***
	GED vs. HT	2.17700**	2.15652**	2.06908**
BRENT-OIL	N vs. GED	3.21354***	3.41211***	3.48575***
	N vs. HT	2.28060**	2.29968**	2.32231**
	GED vs. HT	2.04768**	2.07784**	2.08898**

附註：1. 本表為 DM 檢定之 t 統計量。2. DM 檢定之虛無假設為兩個模型具有相同的預測能力。3. 正的 (負) t 統計量表示後者模型優 (劣) 於前者模型。4. \*、\*\*、\*\*\* 分別表示具 10%、5%、1% 之顯著水準。5. cm(1)、cm(2)、cm(3) 表示條件平均數方程式之設定分別為  $E(r_t|\Omega_{t-1}) = 0$ 、 $E(r_t|\Omega_{t-1}) = \mu$ 、 $E(r_t|\Omega_{t-1}) = \mu + \phi r_{t-1}$ 。

Brailsford and Faff (1996) 提出當採用不同的損失方程式 (loss function) 評估預測績效時，最佳模型的決定對不同評估方法的選取是敏感的，亦即以不同的損失方程式作為評估標準時，可能會得到不一致的結果。因此本文採用平均絕對誤差 (mean absolute error; MAE) 作為評估準則，再次檢視預測模型之優劣。由表五發現，在不同條件平均數方程式設定下，各模型樣本外預測之平均絕對誤差 (MAE) 在五種資料當中，大小順序與表三排序一致。故模型的優劣順序並沒有因為不同的評估準則而發生改變。

表五 各模型樣本外預測之平均絕對誤差 (MAE)

	模型	cm(1)	cm(2)	cm(3)
DOWJONES	N	0.43285	0.43228	0.43217
	GED	0.43132	0.43060	0.43044
	HT	<b>0.40131</b>	<b>0.40067</b>	<b>0.39930</b>
S&P500	N	0.45195	0.45133	0.45094
	GED	0.45160	0.45073	0.45027
	HT	<b>0.43543</b>	<b>0.43488</b>	<b>0.43391</b>
NASDAQ	N	0.65578	0.65440	0.65428
	GED	0.65441	0.65281	0.65272
	HT	<b>0.64174</b>	<b>0.64063</b>	<b>0.64068</b>
WTI-OIL	N	4.68203	4.68978	4.67199
	GED	4.46713	4.48404	4.46505
	HT	<b>3.68041</b>	<b>3.66777</b>	<b>3.65780</b>
BRENT-OIL	N	4.10081	4.10876	4.11052
	GED	4.07449	4.08148	4.08216
	HT	<b>3.59446</b>	<b>3.60594</b>	<b>3.60490</b>

附註：cm(1)、cm(2)、cm(3)表示條件平均數方程式之設定分別為  $E(r_t|\Omega_{t-1}) = 0$ 、 $E(r_t|\Omega_{t-1}) = \mu$ 、 $E(r_t|\Omega_{t-1}) = \mu + \phi r_{t-1}$ 。

表六 移除極端值後之各模型樣本外預測均方誤差(MSE)、平均絕對誤差(MAE)

	模型	cm(1)	cm(2)	cm(3)	OBS
DOWJONES	N	0.31999 [0.40942]	0.31951 [0.40885]	0.31955 [0.40879]	
	GED	0.31857 [0.40783]	0.31798 [0.40710]	0.31791 [0.40700]	248
	HT	<b>0.30589 [0.37714]</b>	<b>0.30546 [0.37650]</b>	<b>0.30492 [0.37514]</b>	
S&P500	N	0.38914 [0.43929]	0.38835 [0.43872]	0.38763 [0.43840]	
	GED	0.38886 [0.43890]	0.38787 [0.43809]	0.38698 [0.43770]	249
	HT	<b>0.38240 [0.42239]</b>	<b>0.38169 [0.42188]</b>	<b>0.38093 [0.42097]</b>	
NASDAQ	N	0.86167 [0.63255]	0.85915 [0.63126]	0.85871 [0.63115]	
	GED	0.86036 [0.63115]	0.85762 [0.62963]	0.85735 [0.62955]	249
	HT	<b>0.85568 [0.61821]</b>	<b>0.85329 [0.61717]</b>	<b>0.85298 [0.61722]</b>	
WTI-OIL	N	28.11130 [4.43946]	28.18414 [4.44835]	28.02227 [4.42975]	
	GED	26.49641 [4.21762]	26.64767 [4.23538]	26.47096 [4.21574]	248
	HT	<b>23.06784 [3.41174]</b>	<b>23.06217 [3.39893]</b>	<b>23.02339 [3.38858]</b>	

附註：1. OBS 表示移除極端值後所剩之觀察值個數。2. cm(1)、cm(2)、cm(3)表示條件平均數方程式之設定分別為  $E(r_t|\Omega_{t-1}) = 0$ 、 $E(r_t|\Omega_{t-1}) = \mu$ 、 $E(r_t|\Omega_{t-1}) = \mu + \phi r_{t-1}$ 。3. 括弧內之數據表示移除極端值後，各模型樣本外預測之平均絕對誤差 (MAE)。

而考慮到報酬率極端值可能混淆參數的估計，進而造成模型在波動性預測績效上的優劣順序發生改變，將樣本外 250 筆日報酬率的觀察值當中，偏離平均值三個標準差的觀察值刪去後，重新計算各個模型在不同條件平均數方程式設定下之 MSE、MAE，結果列於表六。除布朗特原油外，其餘四組資料在移除極端值後，所有預測模型在不同條件平均數設定下之 MSE (MAE) 均明顯比表三 (表五) 下降許多，但模型的優劣順序並沒有因為去除極端值而發生改變。

表七 移除極端值後之 DM 檢定統計量

	模型	cm(1)	cm(2)	cm(3)
DOWJONES	N vs. GED	1.73590**	1.85261**	1.89642**
	N vs. HT	2.22497**	2.19236**	2.18981**
	GED vs. HT	2.24506**	2.19497**	2.17830**
S&P500	N vs. GED	0.56558	1.02758	1.32179*
	N vs. HT	1.64725**	1.63229*	1.60259*
	GED vs. HT	1.70975**	1.63129*	1.55939*
NASDAQ	N vs. GED	1.08599	1.26085	1.14252
	N vs. HT	1.08549	1.04525	1.02754
	GED vs. HT	1.04447	0.95048	0.96718
WTI-OIL	N vs. GED	4.80443***	4.78142***	4.83581***
	N vs. HT	4.16283***	4.11166***	4.04232***
	GED vs. HT	3.69648***	3.68391***	3.56678***

附註：1. 本表為 DM 檢定之 t 統計量。2. DM 檢定之虛無假設為兩個模型具有相同的預測能力。3. 正的 (負) t 統計量表示後者模型優 (劣) 於前者模型。4. \*、\*\*、\*\*\* 分別表示具 10%、5%、1% 之顯著水準。5. cm(1)、cm(2)、cm(3) 表示條件平均數方程式之設定分別為  $E(r_t | \Omega_{t-1}) = 0$ 、 $E(r_t | \Omega_{t-1}) = \mu$ 、 $E(r_t | \Omega_{t-1}) = \mu + \phi r_{t-1}$ 。

在移除極端值後，重複對三種預測模型再次進行 DM 檢定，結果列於表七。實證結果指出 GARCH-GED 模型與 GARCH-HT 模型在不同條件平均數方程式設定下，對日報酬率平方的相對預測能力依舊比 Gaussian GARCH 模型佳。GARCH-HT 與 GARCH-GED 模型相比，GARCH-HT 模型的相對預測能力仍優於 GARCH-GED 模型。而道瓊工業股價指數、西德州中級原油現貨價格之 DM 檢定統計量分別提升至 5% 與 1% 的顯著水準；S&P500 股價指數、NASDAQ 股價指數之 DM 檢定統計量亦較表四提升許多。特別的是，S&P500 股價指數在移除極端值後，大部分的 DM 檢定統計量由原本的不顯著提升至 10% 以上的顯著水準，顯示極端值的確容易混淆參數的估計，影響模型對波動性預測的績效。

一般在評估時間序列模型預測能力的比較上，通常對樣本外一期的預測能力好，但未必在長期的預測績效亦有良好的表現。因此本文同時探討樣本外 10 期與 20 期的模型相對預測能力比較，結果列於表八。在五種實證資料當中，由 DM 檢定發現，不論在 10 期或 20 期的檢定結果，GARCH-GED 模型與 GARCH-HT 模型在不同條件平均數方程式設定下，對日報酬率平方的相對預測能力皆顯著優於 Gaussian GARCH 模型。GARCH-HT 模型則顯著優於 GARCH-GED 模型。更值得一提的是，在五種實證資料當中，長天期的波動性預測相較於一天期的預測結果，GARCH-HT 模型更具有顯著性的優勢。由以上的分析與探討，更增加了本文實證結果的穩健性。

表八 長天期樣本外預測之 DM 檢定統計量及均方誤差 (MSE)

Panel A. 10 天期樣本外預測					
$E(r_t \Omega_{t-1}) = 0$					
DM-檢定	DOWJONES	S&P500	NASDAQ	WTI-OIL	BRENT-OIL
N vs. GED	3.19134***	2.40473***	1.64100*	5.24030***	4.71232***
N vs. HT	3.92880***	3.93160***	2.04332**	6.23593***	4.50903***
GED vs. HT	3.98308***	3.95889***	2.08518**	6.32333***	4.48129***
MSE <sub>N</sub>	0.42176	0.37443	0.81838	40.41609	29.56312
MSE <sub>GED</sub>	0.42157	0.37437	0.81831	40.25440	29.51161
MSE <sub>HT</sub>	<b>0.41947</b>	<b>0.37312</b>	<b>0.81771</b>	<b>39.71129</b>	<b>29.13513</b>
$E(r_t \Omega_{t-1}) = \mu$					
DM-檢定	DOWJONES	S&P500	NASDAQ	WTI-OIL	BRENT-OIL
N vs. GED	3.20730***	2.39788***	1.57568*	5.16287***	4.81668***
N vs. HT	3.90863***	3.89284***	2.00779**	6.23646***	4.61961***
GED vs. HT	3.96018***	3.91976***	2.05864**	6.33652***	4.59704***
MSE <sub>N</sub>	0.42108	0.37330	0.81538	40.51522	29.69121
MSE <sub>GED</sub>	0.42089	0.37324	0.81531	40.35392	29.63875
MSE <sub>HT</sub>	<b>0.41880</b>	<b>0.37200</b>	<b>0.81468</b>	<b>39.73634</b>	<b>29.18944</b>
$E(r_t \Omega_{t-1}) = \mu + \phi r_{t-1}$					
DM-檢定	DOWJONES	S&P500	NASDAQ	WTI-OIL	BRENT-OIL
N vs. GED	3.31726***	2.55189***	1.58557*	5.20568***	4.83671***
N vs. HT	3.90895***	3.80937***	1.99332**	6.19464***	4.62303***
GED vs. HT	3.94978***	3.82037***	2.04119**	6.27922***	4.59879***
MSE <sub>N</sub>	0.42025	0.37136	0.81464	40.36824	29.69474
MSE <sub>GED</sub>	0.42004	0.37130	0.81457	40.20310	29.64252
MSE <sub>HT</sub>	<b>0.41787</b>	<b>0.37007</b>	<b>0.81395</b>	<b>39.60888</b>	<b>29.19359</b>

表八 長天期樣本外預測之 DM 檢定統計量及均方誤差 (MSE) (續)

Panel B. 20 天期樣本外預測					
$E(r_t \Omega_{t-1}) = 0$					
DM-檢定	DOWJONES	S&P500	NASDAQ	WTI-OIL	BRENT-OIL
N vs. GED	4.73865***	2.06936**	1.78950**	7.55657***	6.03186***
N vs. HT	5.57585***	4.18372***	2.24989**	7.32894***	5.60395***
GED vs. HT	5.63698***	4.26136***	2.28430**	7.25640***	5.54744***
MSE <sub>N</sub>	0.45495	0.48226	1.09664	40.93066	30.44227
MSE <sub>GED</sub>	0.45468	0.48220	1.09659	40.83295	30.37841
MSE <sub>HT</sub>	<b>0.45144</b>	<b>0.48062</b>	<b>1.09596</b>	<b>40.23385</b>	<b>29.91738</b>
$E(r_t \Omega_{t-1}) = \mu$					
DM-檢定	DOWJONES	S&P500	NASDAQ	WTI-OIL	BRENT-OIL
N vs. GED	4.76271***	2.02014**	1.64677**	7.64723***	6.07866***
N vs. HT	5.58419***	4.16407***	2.25314**	7.33768***	5.73450***
GED vs. HT	5.64297***	4.24796***	2.30931**	7.26968***	5.69629***
MSE <sub>N</sub>	0.45505	0.48154	1.09456	41.02441	30.56352
MSE <sub>GED</sub>	0.45478	0.48149	1.09451	40.92084	30.49804
MSE <sub>HT</sub>	<b>0.45153</b>	<b>0.47992</b>	<b>1.09385</b>	<b>40.24366</b>	<b>29.93745</b>
$E(r_t \Omega_{t-1}) = \mu + \phi r_{t-1}$					
DM-檢定	DOWJONES	S&P500	NASDAQ	WTI-OIL	BRENT-OIL
N vs. GED	4.85702***	2.19449**	1.69057**	7.61224***	6.09295***
N vs. HT	5.61476***	4.12474***	2.24133**	7.31411***	5.73531***
GED vs. HT	5.66941***	4.19363***	2.29184**	7.24069***	5.69575***
MSE <sub>N</sub>	0.45511	0.47999	1.09412	40.93723	30.56199
MSE <sub>GED</sub>	0.45481	0.47993	1.09407	40.83280	30.49678
MSE <sub>HT</sub>	<b>0.45142</b>	<b>0.47834</b>	<b>1.09341</b>	<b>40.17504</b>	<b>29.93696</b>

附註：1. DM 檢定為 t 統計量。2. DM 檢定之虛無假設為兩個模型具有相同的預測能力。3. 正的 (負) t 統計量表示後者模型優 (劣) 於前者模型。4. \*、\*\*、\*\*\* 分別表示具 10%、5%、1% 之顯著水準。

## 伍・結論

GARCH-GED 模型與 GARCH-HT 模型皆能有效描繪 Gaussian GARCH 模型所無法捕捉到金融資產報酬高狹峰、厚尾的特性。本文藉由三種股價指數 (美國道瓊工業股價指數、S&P500 股價指數、NASDAQ 股價指數)，兩種能源現貨價格 (西德州中級原油及英國倫敦布朗特原油) 之日報酬率作為實證研

究對象。因為真實的波動性無法被事先觀察到，本研究使用日報酬率的平方作為代理變數，當以 MSE 作為損失函數 (quadratic loss function) 時，仍能夠保持模型相對預測能力的優劣順序。

實證結果指出逐日樣本外預測 (one-step ahead prediction)，由 DM 檢定發現，在五種實證資料當中，GARCH-GED 模型與 GARCH-HT 模型在不同條件平均數方程式設定下，對日報酬率平方的相對預測能力都優於 Gaussian GARCH 模型。而 GARCH-HT 模型的相對預測能力則優於 GARCH-GED 模型。當我們採用平均絕對誤差 (MAE) 再次檢視預測模型之優劣時，模型的優劣順序並沒有因為不同的評估準則而發生改變。考量日報酬率之極端值可能混淆參數的估計，影響模型的預測績效，在刪除極端值後，發現所有預測模型在不同條件平均數方程式設定下之 MSE 與 MAE 均明顯下降許多 (除布朗特原油外)，但模型的優劣順序並沒有因為刪除極端值而發生改變。DM 檢定的結果亦指出 GARCH-GED 模型與 GARCH-HT 模型，對日報酬率平方的相對預測能力依舊比 Gaussian GARCH 模型佳。GARCH-HT 模型的相對預測能力則仍優於 GARCH-GED 模型。值得注意的是，在移除極端值之後，道瓊工業股價指數、西德州中級原油現貨價格之 DM 檢定統計量分別提升至 5% 與 1% 的顯著水準，而 S&P500 股價指數大部分的 DM 檢定統計量亦由原本的不顯著上升至 10% 以上的顯著水準，顯示極端值確實會影響模型對波動性預測的績效。本文同時探討樣本外 10 期與 20 期的模型相對預測能力比較。長天期的檢定結果發現，GARCH-GED 模型與 GARCH-HT 模型在不同條件平均數方程式設定下，對日報酬率平方的相對預測能力皆顯著優於 Gaussian GARCH 模型。GARCH-HT 模型則顯著優於 GARCH-GED 模型。相較於一天期的預測結果，GARCH-HT 模型在長天期的波動性預測，更具有顯著性的優勢。

本文採用移動視窗的估計方式進行波動性的預測，修正了 Politis (2004) 以樣本前半部資料來預測整個後半部樣本波動性的缺點。而本研究改採同樣能捕捉高峰、厚尾特性的 GED 分配與 HT 分配作比較，更能凸顯 HT 分配的優點。再者，以 DM 檢定來詮釋三種不同誤差項分配假設下 GARCH(1,1) 模型之間的相對預測能力亦較為恰當。

## 參考文獻

呂文正，「股票報酬率的波動性研究-ARCH-family、SWARCH 模型之應用」，台灣大學經濟研究所碩士論文，1998 年。

吳佳貞，「波動度預測模型之探討」，政治大學金融研究所碩士論文，1998 年。

- 黃弘文，「股價指數期貨上市對指數波動性之研究-以香港恆生指數為例」，中興大學統計研究所碩士論文，1998 年。
- Akgiray, V., "Conditional Heteroscedasticity in Time Series of Stock Return : Evidence and Forecasts", *Journal of Business*, (62), 1989, pp.55-80.
- Andersen, T. G. and Bollerslev, T., "Answering the Skeptics : Yes, Standard Volatility Models do Provide Accurate Forecasts", *International Econometric Review*, (39), 1998, pp.885-905.
- Armstrong, J. S. and Collopy, F., "Errors Measures for Generalizing about Forecasting Methods: Empirical Comparisons", *International Journal of Forecasting*, (8), 1992, pp.69-80.
- Awartani, B. M. A. and Corradi, V., "Predicting the Volatility of the S&P-500 Stock Index via GARCH Models: the Role of Asymmetries", *International Journal of Forecasting*, (21), 2005, pp.167-183.
- Bollerslev, T., "Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity", *Journal of Econometrics*, (31), 1986, pp.307-327.
- Bollerslev, T., "A Conditional Heteroscedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return", *Review of Economics and Statistics*, (69), 1987, pp.542-547.
- Bollerslev, T., Chou, R. Y., and Kroner, K. F., "ARCH Modeling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence", *Journal of Econometrics*, (52), 1992, pp.5-59.
- Brailsford, T. J. and Faff, R. W., "An Evaluation of Volatility Forecasting Techniques", *Journal of Banking and Finance*, (20), 1996, pp.165-185.
- Christoffersen, P., Diebold, F., "How Relevant is Volatility Forecasting for Financial Risk Management? ", *Review of Economics and Statistics*, (82), 2000, pp.12-22.
- Diebold, F. X. and Mariano, R. S., "Comparing Predictive Accuracy", *Journal of Business and Economic Statistics*, (13), 1995, pp.253-263.
- Engle, R., "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of Variance of UK Inflation", *Econometrica*, (50), 1982, pp.987-1008.
- Engle, R. and Bollerslev, T., "Modeling the Persistence of Conditional Variance", *Econometric Reviews*, (5), 1986, pp.1-50.
- Fama, E., "The Behavior of Stock Market Prices", *Journal of Business*, (38), 1965, pp.34-105.
- Heynen, R. C. and Kat, H. M., "Volatility Prediction: A Comparison of the Stochastic Volatility, GARCH(1,1) and EGARCH(1,1) Models", *Journal of Derivatives*, (2), 1994, pp.50-65.
- Inoue, A. and Kilian, L., "In Sample or Out of Sample Tests for Predictability: Which One Should We Use? ", *Econometric Reviews*, (23), 2005, pp.371-402.
- Makridakis, S., "Accuracy Measures: Theoretical and Practical Concerns", *International Journal of Forecasting*, (9), 1993, pp.527-529.
- Mandelbrot, B., "The Variation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business*, (36), 1963, pp.394-419.
- Markowitz, H., "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, (7), 1952, pp.77-91.



Nelson, D., "Conditional Heteroscedasticity in Asset Returns: A New Approach", *Econometrica*, (59), 1991, pp.347-370.

Politis, N. D., "A Heavy-Tailed Distribution for ARCH Residuals with Application to Volatility Prediction", *Annals of Economics and Finance*, (5), 2004, pp.283-298.

Sadorsky, P., "Modeling and Forecasting Petroleum Futures Volatility", *Energy Economics*, (28), 2006, pp.467-488.

## Comparison of the Volatility-Predicting Ability between Heavy-Tailed GARCH Models

MING-CHIH LEE, JUI-CHENG HUNG, HUNG-CHUN LIU \*

### ABSTRACT

In this paper, Gaussian GARCH, GARCH-GED, and GARCH-HT (Politis, 2004) models are used to discuss the relative out-of-sample volatility predicting ability when the distribution of returns exhibits leptokurtic and fat-tailed.

Empirical findings indicate that the relative out-of-sample volatility predicting ability of GARCH-GED model and GARCH-HT model are both superior to Gaussian GARCH model while GARCH-HT model performs better than GARCH-GED model under alternative conditional mean specifications. The performance ranking among these three models remains constant when using the mean absolute error (MAE) as the loss function. After removing outliers, except for Brent Europe, we found that both MSE and MAE have dropped substantially for all models and all conditional mean specifications. Meanwhile, the DM statistics show that the relative predictive ability is consistent with the result before removing outliers. Particularly, outliers certainly confound the relatively predictive performance.

To sum up, this paper adopts rolling-window scheme to further examine out-of-sample volatility predicting ability among Gaussian GARCH, GARCH-GED and GARCH-HT models. In comparison with GED distribution, HT distribution reveals its predominance when returns exhibit leptokurtic and fat-tailed. Moreover, it is more appropriate to use DM test to demonstrate the relative out-of-sample volatility predicting ability among these three GARCH(1,1) models.

Key Words: GARCH · Fat-Tailed · Volatility predicting

---

\* Ming-Chih LEE, Associate Professor, Department of Banking & Finance, Tamkang University. Jui-Cheng HUNG, Lecturer, Department of Finance, Yuanpei University. Hung-Chun LIU, Doctoral Student, Department of Banking & Finance, Tamkang University.

