

以修正基礎樣條函數建構台灣公債市場利率期限結構

周建新·于鴻福·張仲賢·張千雲*

(收稿日期：93 年 3 月 1 日；第一次修正：93 年 5 月 17 日；
接受刊登日期：93 年 6 月 25 日)

摘要

本研究以基礎樣條函數 (basis spline model) 為基礎，來估計台灣公債市場的利率期限結構。實證結果發現，基礎樣條函數對於台灣公債市場債券利率期限結構的估計，具有相當不錯之配適結果，其判定係數高達 94.03%。然而台灣公債市場存有流動性不足的問題，因此本研究同時考慮此項限制，以 Subramanian (2001) 之流動性加權因子來修正基礎樣條函數，實證結果發現考慮流動性限制的修正基礎樣條函數，能大幅提高判定係數達 97.6%，顯見加入流動性限制之修正基礎樣條函數更具有高度配適能力。此外，為減少樣條函數在較長到期日出現震盪過大的缺失，本文同時採用 Waggoner (1997) 所提出之 variable roughness penalty (VRP)，來修正基礎樣條函數，惟實證結果發現，此一模型對於利率期限結構配適結果之改善相當有限。

關鍵詞彙：利率期限結構，基礎樣條近似法，variable roughness penalty

壹·導論

利率期限結構為零息債券的殖利率曲線，對投資者和交易商而言，可以根據利率期限結構判斷任何時點債券的理論價格，以進行投資組合的避險和投資績效的衡量；另外許多金融資產和利率衍生性商品，均需倚賴公債市場利率作為評價之基礎，透過利率期限結構的推估，市場流動性風險及人為操縱的因素才能降至最低，因此如何有效地估計公債市場之利率期限結構，便成了實務界及學術界所共同關心的課題。

利率期限結構之估計可分為三種方法，包括均衡理論模型 (general equilibrium model)、無套利模型 (no-arbitrage model) 和曲線配適方法 (curve fitting)。均衡模型始於 1970 年代，Dothan (1978)、Brennan & Schwartz (1979)、Cox, Ingersoll & Ross (1985) 等學者以均衡理論模型來推導利率期間結構，在假定經濟變數 (如：短期無風險利率、通貨膨脹率等) 服從某一隨機過程下，

* 作者簡介：周建新，國立高雄第一科技大學財管系副教授；于鴻福，國立虎尾科技大學工管系教授；張仲賢，台南企銀雙和分行；張千雲，修平技術學院金融與風險管理系講師／國立高雄第一科技大學管理研究所博士班研究生。

利用隨機過程描述利率，進而推導出在這些假設下的利率期限結構；此外，均衡理論模型對於風險中立的假設，並不符合真實金融市場所推估之債券理論價格，與市場價格將產生顯著誤差，無法與真實市場上之利率期限結構一致。無套利模型如 Ho & Lee (1986)、Heath, Jarrow & Merton (1992) 等，係根據已知的利率期限結構，代入無套利模型中，以便探索未來利率期限結構之變化，並正確地評價利率衍生性商品，至於如何得到已知的利率期限結構，則必須以統計配適方法來估計。

曲線配適方法是以實際公債市場價格，配合統計技術來建構利率期限結構，利率期限結構之準確度與平滑度，將取決於配適函數之選擇。按配適函數之演進大致可分為三個階段：多項式樣條函數 (polynomial spline)、指數樣條函數 (exponential spline) 和基礎樣條函數 (basis spline approximation)。

在多項式樣條函數的估計上，Carleton and Cooper (1976) 採取美國公債市場中固定期間付息日的樣本資料¹，直接以最小平方法 (OLS) 估計利率期限結構，其折線因子符合非負和單調 (monotonic) 非遞增函數的條件，但受限於樣本資料必須皆有固定期間的付息日，故無法應用於其它國家之債券市場，此外，最小平方法所估計之折現因子互相獨立，使得折現函數並不平滑，導致遠期利率曲線產生不連續的現象。故 McCulloch (1971) 提出分段二次多項式 (piece-wise quadratic polynomial function)，認為不同債券在相同的到期日下，應有相同的殖利率，並在連續複利的假設下，利用債券的評價公式和連續折現公式，建構利率期限結構。根據 McCulloch (1971) 所提出之二次分段多項式中，因為在估計遠期利率曲線時會產生反曲點 (knuckles)，使得一次微分不連續，曲線變得不平滑。McCulloch (1975) 又提出立方樣條函數 (cubic spline function) 以解決上述的缺點，雖然 McCulloch (1975) 所提出的立方樣條函數可以解決反曲點，但是因為公式的彈性太大，無法使折現因子保持非遞增函數 (non-increasing)，導致在計算遠期利率時產生負值。Mastronikola (1991) 提出複合立方樣條函數 (complex cubic spline function) 將殖利率曲線分割成數個各子區間，並以結點上之估計殖利率和實際殖利率，求其平方根誤差極小化下，分別估計各區間的殖利率曲線。Schaefer (1981) 以 Bernstein Polynomials 做為折現因子的近似函數，Schaefer 嚴格限制折現因子為非負和單調 (monotonic) 非遞增函數的條件，以避免產生負的遠期利率。

¹ Carleton and Cooper (1976) 採取美國公債市場七年期以下之債券，其每半年付息日即固定在 2 月 15 日、5 月 15 日、8 月 15 日與 11 月 15 日。

Vasicek & Fong (1982) 提出指數樣條函數，將折現因子的近似函數設定為指數函數 (exponential function)，認為估計而得之曲線具有足夠的彈性，可以有效地捕捉各種利率期限結構的形狀。其認為前述的複合立方樣條函數和 Bernstein Polynomial 函數在估計折現函數時，都導致遠期利率在到期日較長時，產生不佳的特性，例如，以 McCulloch (1975) 的模式為例，當到期年限很長時，會產生陡峭的上升或下降曲線。Shea (1985) 實證 Vasicek & Fong (1982) 的模型，發現指數函數並不能達成其所宣稱的結果，折現函數無法呈現穩定地指數遞減；此外，由於樣本資料轉換成指數型態後，導致估計樣本過度集中，利用最小平方法估計該模型，會因最小平方法對錯誤資料敏感性過大，故必須逐步地篩選資料，以避免產生過大之估計誤差，造成不穩定與不真實的遠期利率。

基礎樣條函數是由 Steeley (1981) 首先應用於估計英國金緣債券 (U.K. Gilt-Edged Bond) 之利率期限結構，其不僅可以求得平滑即可信賴的結果，同時還可以減少大量之計算工作。實證上 Lin and Paxson (1993) 和 Yu (1995) 分別將其應用於估計 LIFFE 之德國 Bund 公債及日本公債的利率期限結構，都得到令人滿意的結果。此外，Deacon and Derry (1994) 亦提出使用基礎樣條函數之論證，在比較以政府公債來估計利率期限結構之各種方法後，他們認為基礎樣條函數獲得一致的肯定及實務界的偏好。

然而 Fisher et al. (1995) 指出，樣條函數震盪過大可能會導致曲線的平滑度僵化，容易有誤差過大的情形。故 Fisher et al. (1995) 根據 McCulloch (1975) 所提出的立方樣條函數，並加入了 roughness penalty 來控制震盪的情形，有效地減低了殖利率曲線在長期震盪的情形，但由於使用固定的 roughness penalty，使得在短期擬合度，反而不如 McCulloch (1975) 的配適結果。Waggoner (1997) 修正了 Fisher et al. (1995) 所提出的 roughness penalty 方法，採用了 variable roughness penalty (VRP)，加入了不同到期日的因子，實證結果其能有效地減少了長期震盪，並保有短期的擬合度。

由於 Deacon and Derry (1994) 認為基礎樣條函數獲得學術與實務界一致的肯定，因此本研究為減少樣條函數震盪過大而導致殖利率曲線平滑度僵化、誤差過大的情形，擬採用了 Waggoner (1997) 所提出之 VRP 方法，以期減少了長期震盪並保有短期的擬合度。除此之外，台灣過去十年間之公債交易以附買回條件交易為主，買賣斷交易量雖逐年遞增，但與國外市場相較，台灣公債市場的交易量明顯不如國外市場熱絡，故在估計利率期限結構的準確度，易受到債券交易量太小、流動性不足的影響。因此本研究分別考慮樣條函數震盪過

大可能會導致曲線的平滑度僵化的影響，以及台灣公債市場的流動性不足的因素，擬以 VRP 與修正流動性的基礎樣條函數二種方法，來估計台灣公債市場的利率曲線結構，並驗證何種方法對於台灣公債市場具較佳的配適能力。

貳・實證模型

一、基礎樣條函數

根據債券評價公式，債券價格等於一連串的現金流量乘以折現因子而得，其評價模型如下：

$$B_i = \sum_{t=1}^{T_i} d_i(t) P(t), \quad 1 \leq i \leq n \quad (1)$$

其中 n 為無風險債券個數； B_i 為第 i 種債券之淨現值； T_i 是第 i 種債券的到期日； $d_i(t)$ 是第 i 種債券在 t 時點時的現金流量償付； $P(t)$ 為折現因子。

根據威勒斯近似定理 (Weierstrass approximation theorem)，定義於閉區間之連續函數中，可由一群函數之集合所近似，因此利用時間的多重函數之集合，近似折現因子，其數學式表示如下：

$$P(t) = \sum_{j=1}^k b_j g_j(t) \quad (2)$$

上式中， $g_j(t)$ 為一近似函數， b_j 是 k 個近似函數中之估計係數，將方程式 (2) 代入方程式 (1) 並加上殘差項，則可得：

$$B_i = \sum_{j=1}^k b_j \left[\sum_{t=1}^{T_i} d_i(t) g_j(t) \right] + \varepsilon_i \quad (3)$$

方程式 (3) 是一線性迴歸模式，其中 $g_j(t)$ 為近似函數，有關函數 $g_j(t)$ 及決定估計係數的個數 k 的選擇，係根據模型能否良好地擬合觀測資料，並造成一平滑的即期利率曲線和良好的遠期利率曲線，雖然 k 值越大會產生更正確的數值，但卻會造成參數過多 (over-parameterized) 及無意義的估計係數，而使估計的可信度受到質疑。

Steeley (1991) 利用基礎樣條函數配適英國金線債券的期限結構，可獲得平滑的遠期利率曲線及可信賴的結果。基礎樣條函數定義如下 (Powell, 1981):

$$G_s^P(t) = \sum_{i=s}^{s+p+1} \left\{ \left[\prod_{j=s, j \neq i}^{s+p+1} \frac{1}{(t_j - t_i)} \right] [\max(t - t_i, 0)]^p \right\} \quad (4)$$

$$s = 1, \Lambda, k \quad k = p + m$$

上式中， $G_s^P(t)$ 為第 s 個 p 階的基礎多重函數，如果 t 在區間 $[t_s, t_{s+p+1}]$ 中，則函數值不為零，否則等於零。 m 是 $t=0$ 到樣本債券中最長到期日的子期間個數。整個計算過程中共有 $p+m$ 個基礎多重函數。在任何時間區間 $[t_s, t_{s+1}]$ 的結尾稱為節點，因此在整個時間水平軸上共有 $2p+m+1$ 個節點。

方程式 (3)-(4) 的 $G_s^P(t)$ ，為建構折現函數之基礎，令：

$$P(t) = \sum_{j=1}^k b_j G_j(t) \quad (5)$$

合併方程式 (4) 和 (5)，並加上一誤差項，則可得觀察到的第 i 個債券市場價格 \hat{B}_i ：

$$\hat{B}_i = \sum_{j=1}^k b_j \left[\sum_{t=1}^{T_i} d_i(t) G_j(t) \right] + \varepsilon_i \quad (6)$$

因為殘差項 ε_i 的關係，我們沒有任何理由期望方程式(6)符合迴歸的假設，因為當接近到期日時，債券的價格幾乎等於其面值，而當時間距離到期日越久，債券的價格就越不確定，其變異數也越大，故債券價格的變異數和時間相關。根據 Schaefer & Schwartz (1987)，債券的存續期間解釋了大部分的變異，故方程式(6)中殘差項的變異數與共變異數可假設如下：

$$E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2 h_i; \quad E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \quad i \neq j$$

其中 h_i 是第 i 種債券的存續期間，以數學式表示為：

$$h_i = \frac{1}{B_i} \sum_{t=1}^{T_i} \frac{td_i(t)}{(1+ym_i)^t} \quad (7)$$

方程式 (7) 中， ym_i 為第 i 種債券到期殖利率 (yield to maturity)。此外，考慮 (5) 式之折現函數必須具有在 $t=0$ 時會等於 1 之特性²，在此依照 Lin (1995, 2002) 之作法，本文同時考慮此一強制條件下，求算方程式(8)目標函數最小化，則可獲得方程式 (2) 中 k 個近似函數之估計係數 (b_j)，再利用即期利率與折現函數之關係³，求得利率期間結構。

$$\text{MIN} \quad \sum_{i=1}^n (B_i - \hat{B}_i(P))^2 \quad (8)$$

二、考慮流動性不足下的基礎樣條函數

由於台灣公債市場的規模尚在發展中，與外國市場相較，顯得發行量較小，且由於交易者以法人為主，具有充分流動性的交易債券量並不多。因此，在交易資訊不發達的情形下，容易使得流動性低的債券出現不合理的價格，甚至沒有成交價格。由於交易商買賣報價 (bid-ask) 差，反應了交易商撮合市場買賣方的交易成本，因此當買賣價差愈大，表示市場流動性愈差。理論上，買賣價差的倒數為流動性函數的最佳估計數，但買賣價差不易自市場交易價格中得知，故根據 Subramanian (2001) 透過既有資料來計算個別債券的流動性，其以債券的交易金額與交易張數來衡量債券的流動性，並利用雙曲線正切函數 (hyperbolic tangent function; tanh) 將流動性定義如下：

$$w_i = [\tanh(-v_i / v_{\max})] + [\tanh(-n_i / n_{\max})]$$

其中 v_i 與 n_i 分別表示第 i 張債券的交易金額與交易張數， v_{\max} 與 n_{\max} 分別表示當天所有債券中最大的交易金額與交易張數。但國內公債市場並無交易張數的資料，考慮成交量較大之債券與成交張數應是正向關係，因此本研究將流動性更改為

² $P(0) = \sum_{j=1}^k b_j G_j(0) = 1$

³ 一旦我們求出估計係數，則我們可以由(5)式去計算折現函數，則即期利率可以計算如下：

$$R(t) = \left[\frac{1}{P(t)} \right]^{1/t} - 1$$

$$w_i = [\tanh(-v_i / v_{\max})]$$

對流動性高的債券來說， v_i / v_{\max} 較接近 1，此一數值與其他債券不會有太大的不同，但對流動性較差債券來說，當債券的流動性降低，此一數值也會迅速的減少。而個別債券所佔權重則為

$$W_i = \frac{w_i}{\sum w_i} \quad (9)$$

因此在考慮流動不足的情形下，將(8)式目標函數⁴改為：

$$\text{MIN} \sum_{i=1}^n W_i (B_i - \hat{B}_i(P))^2 \quad (10)$$

三、加入VRP的基礎樣條函數

利用 Waggoner (1997) 所提出之 VRP，加入了不同到期日的因子，以減少了長期震盪並保有短期的擬合度。加入修正後的 VRP，求取樣條函數在整個節點位置座標 $[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k]$ 之極小化目標：

$$\text{MIN} \left\{ \sum_{i=1}^N [B_i - \hat{B}_i(P)]^2 + \int_0^{\tau_k} \lambda(t) [P''(t)]^2 dt \right\} \quad (11)$$

其中 $P''(t)$ 為折現因子的二次微分， τ_k 為估計模型中到期日最長的節點。上式第一項為適合度 (goodness of fit) 目標，第二項為平滑度 (smoothness) 目標，而 $\lambda(t)$ 稱為roughness penalty，用來作為為適合度與平滑度兩種目標之權衡，其定義如下：

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0.1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 100 & 1 \leq t \leq 10 \\ 100,000 & 10 \leq t \end{cases}$$

⁴ 根據上述目標式(10)，可定義債券訂價模型如下：

$$W_i B_i = \sum_{t=1}^{T_i} W_i d_i(t) P(t), \quad 1 \leq i \leq n$$

其中 n 為無風險債券個數； B_i 為第 i 種債券之淨現值； T_i 是第 i 種債券的到期日； $d_i(t)$ 是第 i 種債券在 t 時點時的現金流量償付； W_i 為第 i 種債券以成交量加權後的權重； $P(t)$ 為折現因子。

參・實證與結果分析

一、資料

為了獲得一平滑的殖利率曲線，首先必須定義公式(4)中基礎樣條函數的各項參數值。本研究依照 Lin (1995, 2002) 之作法，使用立方 ($p=3$) 的擬合函數來估計折限因子。根據基礎樣條函數 (B-spline function) 的參數說明可知，基礎樣條函數的個數決定於 k ，而 k 又取決於 p 和子期間個數(m)之和 ($k=p+m$)，所以一旦決定 p 和 m 的值之後，即可得知有幾條基礎樣條函數。

對於子期間個數(m)及樣本節點的設定，則採用試誤法取得各模型之估計的參數是否顯著，以決定 m 值及節點的設定。因為 m 值表示樣本期間內子期間個數，例如若 m 值等於 3，表示樣本期間分成 3 個子期間，必須要有 4 個樣本內節點；同理可證，若 m 值等於 4，則需要 5 個樣本內節點。至於節點總個數則等於 $2p+m+1$ ，所以 $p=3$ 且 $m=3$ 時，共有 6 條基礎樣條函數 ($k = p + m = 3 + 3 = 6$)，總共有要設 10 個節點位置，其中有 4 個樣本內節點，故可推得有 6 個樣本外節點。

過去國內外以基礎樣條函數模型為基礎的實證研究，多以整個樣本期間來估算，然而台灣公債市場的發展較晚，公債的到期日涵蓋範圍不如國外之債券市場廣泛，國內於 1998 年 11 月 24 日首度發行 20 年期的政府公債，而遲至 2001 年 7 月 17 日，台灣始出現第一張 30 年期的公債。本研究的觀察期間為 1995 年 12 月 29 日至 2002 年 9 月 27 日，且到期日在 30 年以內的台灣政府公債，公債樣本數目為 85 種 (詳見附錄一)，資料來源為經濟新報，公債付息頻率包括半年或一年，公債樣本為每週星期五之最高和最低殖利率報價之平均值；若無交易資料時 (亦即市場仍未有新的資訊來反應價格)，則以最接近之交易日的資料代替之⁵。

由於樣本期間內的最長債券到期日差異甚大，直接影響了基礎樣條函數模型參數及節點的設定，不應以同樣參數設定和節點來估算整段樣本期間，目前國外之實證研究，未採用分段決定節點之估計法，主要之理由是在觀察期間，各種債券到期日均勻分佈在某一期間。本文採用分段之理由是國內早期發行之債券到期日，在 15 年以內，近年來才開始發行較長天期之公債。因此需

⁵ 由於政府未定期定量發行公債，會造成在某一特定觀察時點樣本數不足，不過國內學者賴曉璐 (1996) 論文所採用的樣本數目為 24 種公債，觀察期間為 1994 年 6 月至 1996 年 5 月，而周建新、于鴻福、張千雲 (2003) 論文之觀察期間為 1995 年 12 月至 2000 年 11 月，樣本數目為 67 種公債，所使用之債券樣本數目是遠少於本研究所使用之公債數目 (85 種)。

要依樣本債券之最長到期日的不同，分段配適，才能夠符合基礎樣條函數樣本內節點之設定原則⁶。故本文與周建新、于鴻福、張千雲 (2003) 之作法不同，在節點的設定上，為符合參數設定意義並獲得精確估算結果，乃將樣本期間依債券最長到期日的不同分成三個樣本區間，分別以不同的子期間個數 m 與節點的設定估計利率期限結構⁷。第一樣本區間為 1-152 週 (1995 年 12 月 29 日到 1998 年 11 月 20 日)，第二樣本區間為 153-290 週 (1998 年 11 月 27 日到 2001 年 7 月 13 日)，第三樣本區間為 291-353 週 (2001 年 7 月 20 日到 2002 年 9 月 27 日)。估算步驟如下：

步驟一：根據期間內債券最長到期日設定 m 值。

步驟二：設定節點位置。

步驟三：進行 B-spline 模型的求算。

步驟四：計算判定係數。

步驟五：判定係數是否最佳，若並非最佳，則重複步驟一，直到找出判定係數最佳之節點設定為止。

經過反覆進行上述步驟，以尋求最佳參數及節點設定。

二、模型配適能力之比較指標

根據周建新、于鴻福、張千雲 (2003) 利用付息債券價格為零息券之投資組合理論，比較各模型所推估之理論付息債券價格與市場格之差異，定義三種判斷準則如下：

(一)判定係數：

$$1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{B}_i - B_i)^2}{\sum_{i=1}^n (\hat{B}_i - \bar{B})^2}, \text{ 其中 } \bar{B} \text{ 為市場價格之平均數，此一指標可提供一明確}$$

的參照數值做為模型優劣之判斷準則，此一數字越大，代表模型之配適能力越佳。

⁶ 根據基礎樣條函數 (B-spline function) 的參數說明可知， m 是 $t=0$ 到樣本債券中最長到期日的子期間個數。例如 Lin (2002) 使用台灣公債建構利率期限結構，其使用之樣本債券的最長到期日為 15 年，設定樣本內節點介於 0~15，故可知其設定樣本內最右邊的節點位置，必須取決於觀察期間樣本債券的最長到期日。

⁷ 根據各期間內債券最長到期日設定 m 值，並設定節點位置，以進行各模型的求解。根據判定係數，反覆進行上述過程，尋求最佳 m 值與節點設定。

(二)平均方根誤差百分比RMSPE (root mean squared percentage error)：

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\hat{B}_i - B_i}{\hat{B}_i} \right)^2} * 100\% , \text{ 爲一相對量的誤差評估準則，數值愈小，模}$$

型愈能捕捉到市場之價格。

(三)平均方根誤差：

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{B}_i - B_i)^2} , \text{ 爲一絕對量的誤差評估標準。}$$

三、三種模型配適能力比較

在第一階段期間，樣本的到期日最長爲 15 年，因此設定 $m=3$ ，節點分別設定爲-3, -2, -1, 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30 共 10 個節點，整個估計過程中共有 6 條 3 階基礎樣條函數。在第二階段期間，樣本的到期日最長爲 20 年，因此設定 $m=4$ ，節點分別設定爲-3, -2, -1, 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 共 11 個節點，整個估計過程中共有 7 個 3 階基礎樣條函數。在第三階段內，樣本的到期日最長爲 30 年，因此設定 $m=5$ ，節點分別設定爲-3, -2, -1, 0, 6, 12, 18, 24, 30, 35, 40, 45 共 12 個節點，整個估計過程中共有 8 條 3 階基礎樣條函數。

(一)基礎樣條函數

根據全部之觀察樣本計算上述指標，基礎樣條函數的配適結果，如表一所示。就判定係數而言，平均值高達爲 94.03%，最高可達 99.58%，最低爲 74.02%；而平均方根誤差百分比在樣本期間內，平均每一張債券的理論價格和實際價格會相差 1.33%，差異最大僅 4.24%，最小則僅爲 0.40%；另外平均方根誤差之平均值爲 1.5032，亦即每百元報價的實際價格和理論價格相差約 1.50 元，最小可到 0.44 元，最大爲 4.66 元。此外，在整個樣本期間中，有 86.40% 的觀察時點，模型的判定係數是大於 90% 以上；而亦有 23.8% 的觀察時點，其平均方根誤差百分比是小於 1%。

與周建新、于鴻福、張千雲 (2003) 之實證結果作一比較，其判定係數爲 86.54%，與之相比本研究之判定係數提昇了 7.5%，因爲基礎樣條函數在估計上必須設定較多參數，而參數的設定對於其估計結果影響又相當大，故若整段樣本期間採用同一標準，容易使得在某些觀察時點的實際狀況，並不符合參數

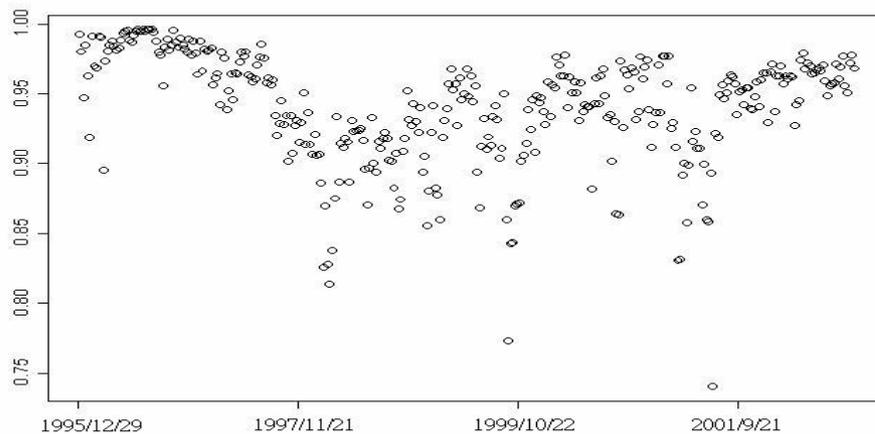
的設定，導致模型估計整體成效變差，顯見本研究採用分段決定節點之估計方法，對於基礎樣條函數的配適能力有顯著的提昇。

表一 基礎樣條函數在樣本觀察期間之配適結果

統計值 \ 判斷準則	判定係數	平均方根誤差百分比	平均方根誤差
平均值	0.9403	0.0133	1.5032
標準差	0.0396	0.0047	0.5638
最大值	0.9958	0.0424	4.6619
最小值	0.7402	0.0040	0.4416

- 註：1.此三種判斷準則均代表利用模型建構之利率期限結構，求得之理論價格與真實價格之解釋能力，其中判定係數此一數字越大，代表模型之配適能力越佳；平均方根誤差百分比為一相對量的誤差評估準則，數值愈小，模型愈能捕捉到市場之價格；平均方根誤差為一相對量的誤差評估準則，數值愈小，模型愈能捕捉到市場之價格。
- 2.本研究分成三階段期間，第一階段樣本的到期日最長為 15 年，因此設定 $m=3$ ，30 共 10 個節點，共有 6 條 3 階基礎樣條函數。在第二階段期間，樣本的到期日最長為 20 年，因此設定 $m=4$ ，共 11 個節點，共有 7 個 3 階基礎樣條函數。在第三階段內，樣本的到期日最長為 30 年，因此設定 $m=5$ ，共 12 個節點，共有 8 個 3 階基礎樣條函數。

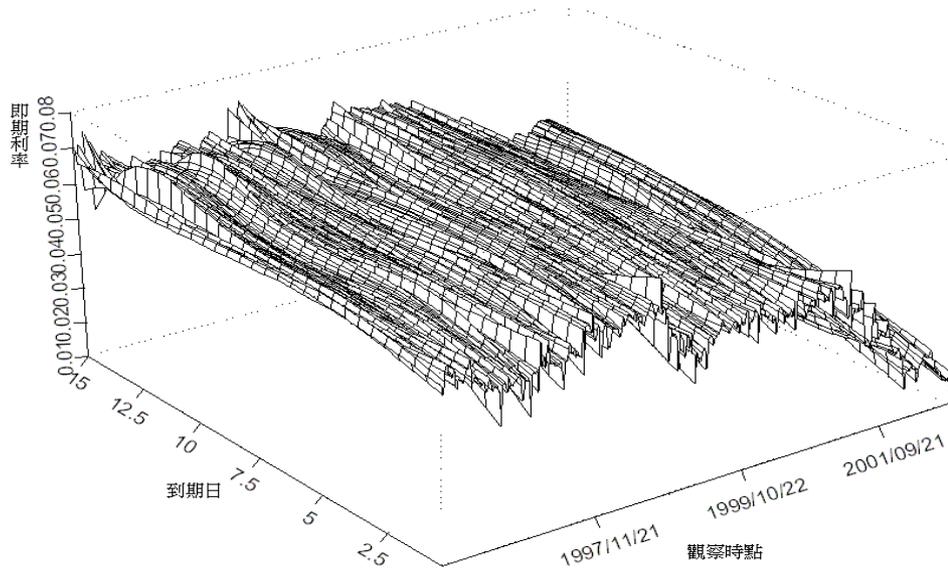
為了檢視樣本期間中各判定準則的變化情形，本研究以判定係數為例，觀察其在樣本期間的分佈，如圖一所示。從判定係數分佈圖可以發現，該模型在觀察期間前半段和後半段的表現相當穩定，判定係數幾乎都高達 90%，而在樣本期間中段部分，判定係數的變化較大且不穩定，因是該段期間的債券交易資料不足所導致。因此，採用基礎樣條函數估計的結果相當精確，尤其在考量樣本實際情形後，以試誤法分段估計及逐步設定參數值，將使得估計結果更進一步提高。



- 註：1.縱坐標代表判定係數值。
2.研究期間為 1995 年 12 月 29 日到 2002 年 9 月 27 日。

圖一 基礎樣條函數在樣本觀察期間之判定係數分佈圖

基礎樣條函數所配適的利率期間結構，觀察期間由 1995 年 12 月 29 日至 2002 年 9 月 27 日，根據圖形大致可分為上升型、下降型和駝峰型三種形狀，如圖二所示。



- 註：1.縱座標高度分別代表即期利率。
2.橫座標分成觀察時點 (自 1995 年 12 月 29 日到 2002 年 9 月 27 日)，與每週所觀察到之不同到期年限之即期利率走勢。

圖二 以基礎樣條函數所估計之利率期間結構

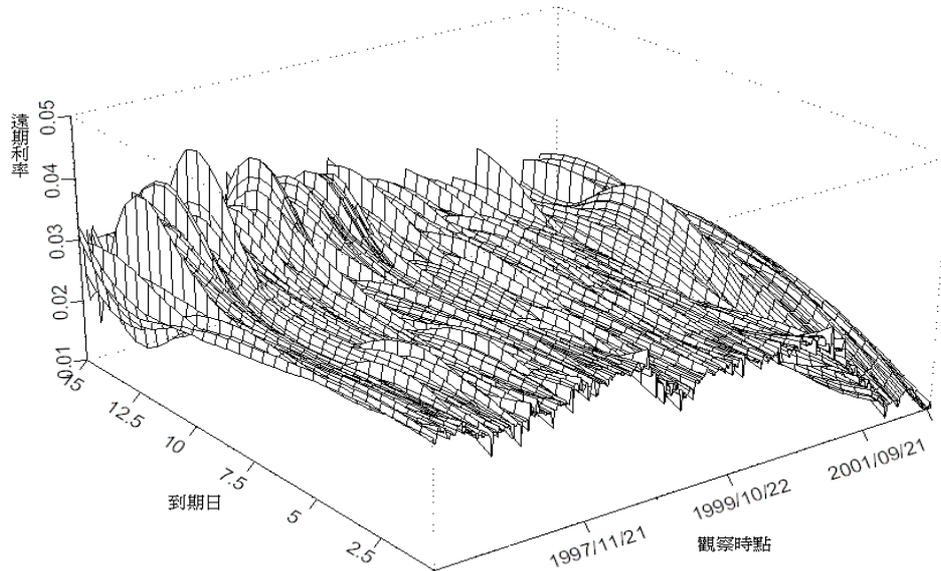
以統計配適方法來建構利率期限結構，往往必須在配適能力和平滑度 (smoothness) 之間做一權衡，為了進一步瞭解基礎樣條函數所估計之利率期間結構，在經過高斯-牛頓法求解後，其平滑度是否能保有穩定且具有漸近長期遠期利率的性質，故將圖二的即期利率曲線轉換為遠期利率曲線加以驗證⁸，如圖三所示。

⁸ 遠期利率和折現因子之關係式如下所示：

$$f(t) = \left[\frac{P(t)}{P(t+1)} \right] - 1$$

其中 $f(t)$ 表示隱含的遠期利率， $P(t)$ 表示折現因子。

將圖三中各觀察日的遠期利率曲線之形狀，和圖二中的即期利率曲線做一比較，發現遠期利率曲線的波動性較即期利率大，到期期限愈長，其波動程度愈劇烈。此一結果亦驗證曲線的配適性與平滑度具有互抵之關係，由於使用基礎樣條函數，雖然配適能力較佳，但卻無法保證產生平滑遠期利率曲線。



- 註：1.縱座標高度分別代表遠期利率。
2.橫座標分成觀察時點 (自 1995 年 12 月 29 日到 2002 年 9 月 27 日)，與每週所觀察到之不同到期年限之遠期利率走勢。

圖三 以基礎樣條函數所估計之遠期利率曲線

(二)考慮流動性限制下的基礎樣條函數

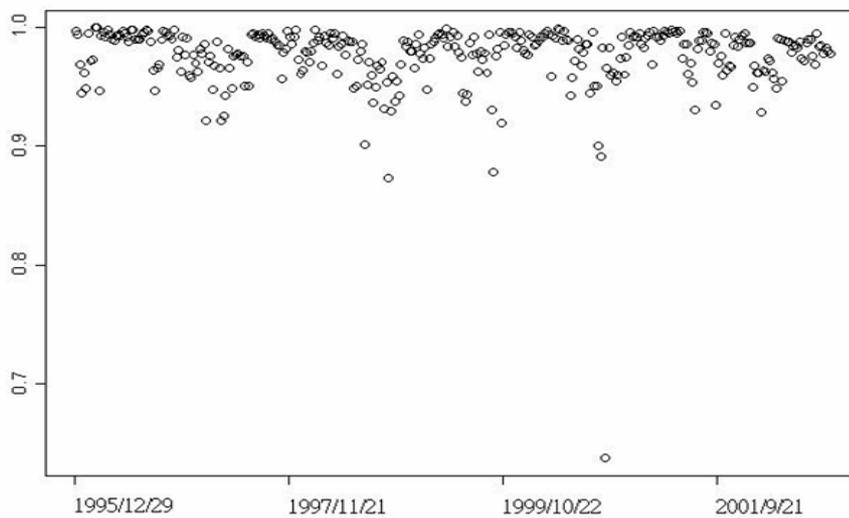
在考慮樣本流動性下，計算前述三種指標，其配適結果如表二所示。

表二 考慮流動性限制下，基礎樣條函數在樣本觀察期間之配適結果

判斷準則 統計值	判定係數	平均方根誤差 百分比	平均方根誤差
平均值	0.9760	0.0012	0.1356
標準差	0.0272	0.0006	0.0668
最大值	0.9993	0.0033	0.3567
最小值	0.6373	0.0003	0.0289

表二的結果顯示，判定係數之平均值高達為 97.6%，最高可達 99.93%，最低為 63.73%；平均方根誤差百分比在樣本期間內，平均每一張債券的理論價格和實際價格差異僅為 0.12%，差異最大僅 0.33%，最小則只有 0.03%；另外平均方根誤差之平均值為 0.1358，亦即每百元報價的實際價格和理論價格相差約 0.14 元，最小可到 0.03 元，最大僅為 0.36 元。其中判定係數最小值的 63.73% 是出現在樣本的第 248 週，推測可能是當週的資料不足或誤差所致。此外，在整個樣本期間中，有 98.58% 的觀察時點，模型的判定係數是大於 90% 以上，僅有 5 週的判定係數低於 90%；而且透過流動性加權的修正後，樣本期間內的所有觀察時點，其平均方根誤差百分比皆提升小於 1%。

為了比較不同方法下，各判定準則在樣本期間中的變化情形，本研究仍以判定係數為例，觀察其在樣本期間的分佈，如圖四所示。

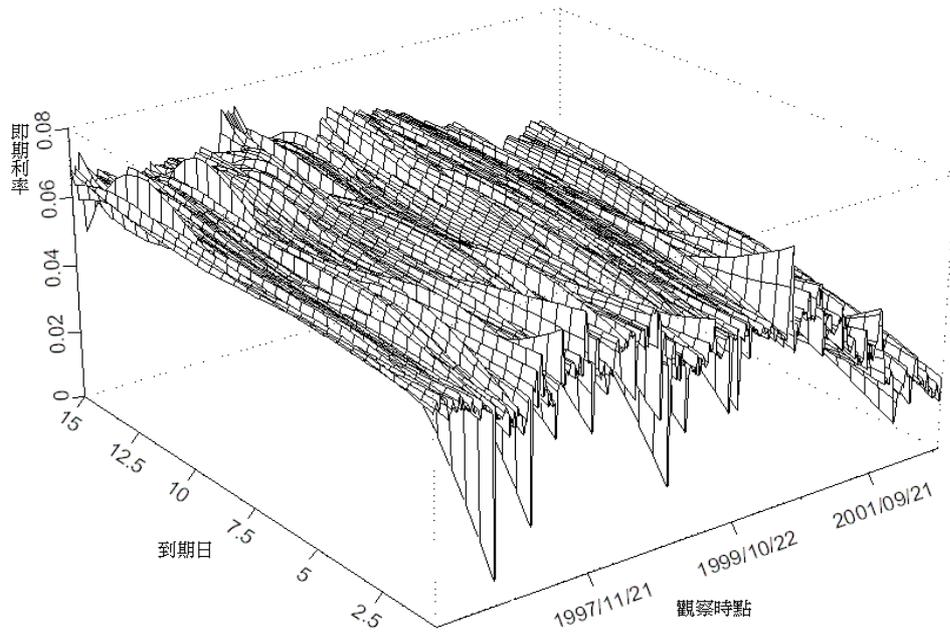


圖四 考慮流動性限制下，基礎樣條函數在樣本觀察期間判定係數分佈圖

由判定係數分佈圖可以發現，考慮流動性限制下的基礎樣條函數，其判定係數在樣本期間的變動，較未考流動性限制下的基礎樣條函數為小，其原因為流動性不足，使得每筆債券交易資料同等之重要，然而在加入流動性因子來進行修正後，會使流動性較差之債券權重降低，流動性較佳之債券權重提高，使得配適結果更具有可信度，故在考慮台灣公債市場流動性不足的情形後，以流動性權重修正基礎樣條函數，除了可以提供比原模型更佳精確的估計結果

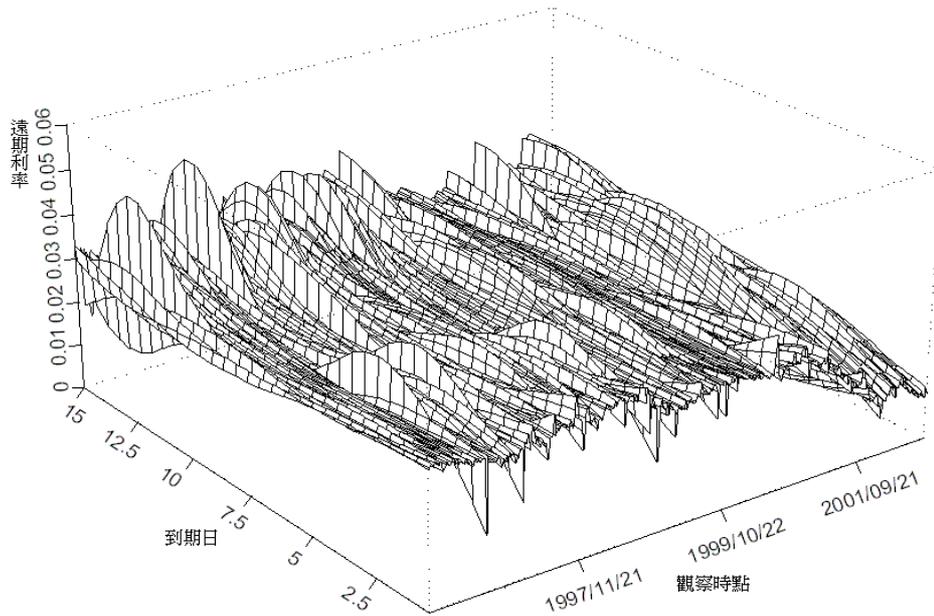
外，更能符合台灣公債市場的實際情形，所建構之利率期限結構，較具有實質代表意義。

以流動性權重修正的基礎樣條函數的利率期限結構如圖五所示，大致可分為上升型、下降型和駝峰型三種形狀，並與原基礎樣條函數的走勢一致，但更能精準地捕捉到即期利率的變動。另外將圖五的即期利率曲線轉換為圖六的遠期利率曲線，發現考慮流動性限制下遠期利率曲線的波動性，仍較考慮流動性限制下之即期利率為大。



- 註：1.縱座標高度分別代表即期利率。
2.橫座標分成觀察時點（自1995年12月29日到2002年9月27日），與每週所觀察到之不同到期年限之即期利率走勢。

圖五 考慮流動性限制下，基礎樣條函數估計的利率期間結構



註：1.縱座標高度分別代表遠期利率。

2.橫座標分成觀察時點 (自 1995 年 12 月 29 日到 2002 年 9 月 27 日)，與每週所觀察到之不同到期年限之遠期利率走勢。

圖六 考慮流動性限制下，以基礎樣條函數所估計之遠期利率曲線

(三)以VRP修正基礎樣條函數

本研究以 Waggoner (1997) 所提出之 VRP，來修正基礎樣條函數，以減少長期震盪並保有短期的擬合度，根據全部之觀察樣本，計算上述三種指標，以 VRP 修正的基礎樣條函數的配適結果列如表三所示。

表三 以 VRP 修正基礎樣條函數在樣本觀察期間之配適結果

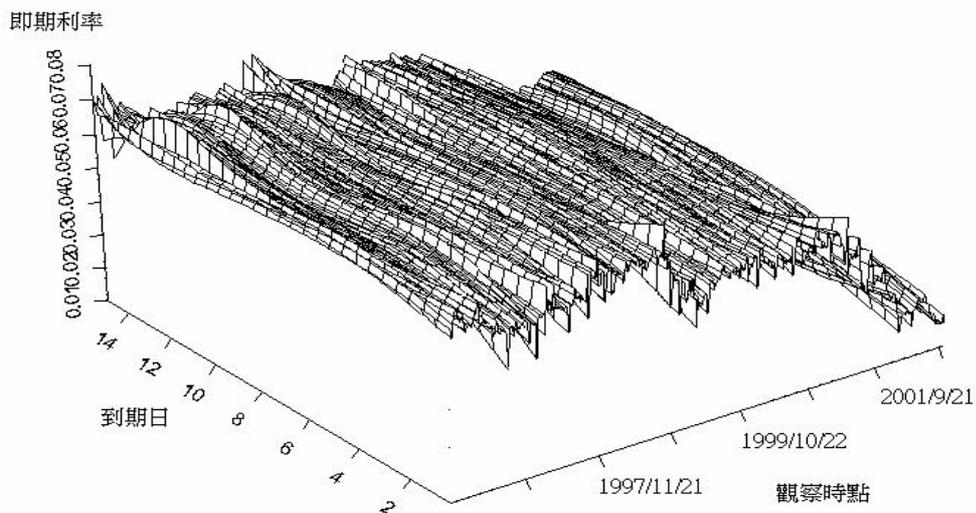
判斷準則 統計值	判定係數	平均方根誤差百分比	平均方根誤差
平均值	0.9409	0.0130	1.5007
標準差	0.0395	0.0047	0.5625
最大值	0.9958	0.0423	4.6587
最小值	0.7415	0.0040	0.4416

由表三的結果可以發現，以 VRP 修正後的模型估算結果，其各項配適能力大約維持原來模型的配適結果，在判定係數的最小值及平均方根誤差百分比

和平均方根誤差最大值則有小幅度的改善，不過其改善程度並不顯著。此一實證結果和原來未考慮流動性限制的基礎樣條函數的結果，並無顯著之差異，其可能原因如下：

1. Waggoner (1997) 採用了 VRP，修正 Fisher et al.(1995)所使用的 roughness penalty 方法，乃是針對 McCulloch (1975)提出的立方樣條函數所進行之修正，本研究將之應用於基礎樣條函數之模型上，在參數設定及模型適合度方面可能都非完全適用。
2. 本研究之基礎樣條函數採用了分段估計及設定參數，而 VRP 考量的參數之一便是以不同到期日的時間因子，與本研究的分段方式有異曲同工之妙，而本研究的估算也獲得了相當精確的結果，這使得以 VRP 修正後的基礎樣條函數配適效果，不如預期。

以 VRP 修正基礎樣條函數所配適的利率期限結構，如圖七所示，可分為上升型、下降型和駝峰型三種形狀，並與原基礎樣條函數所估計的走勢一致，但精準度則和原來基礎樣條函數大約相同。



- 註：1. 縱座標高度分別代表即期利率。
2. 橫座標分成觀察時點 (自 1995 年 12 月 29 日到 2002 年 9 月 27 日)，與每週所觀察到之不同到期年限之即期利率走勢。

圖七 以 VRP 修正基礎樣條函數所配適的利率期限結構

四、基礎樣條函數與流動性加權基礎樣條函數的比較

為了因應台灣公債市場流動性不足的現象，在基礎樣條函數的目標函數中加入流動性加權因子，透過既有資料來計算個別債券的流動性，其以債券的交易金額來衡量債券的流動性，並利用雙曲線切線函數定義權重，來估算台灣公債市場的利率期限結構。為說明即期利率曲線對於以流動性加權調整後的變動情形，本節以樣本期間第 153 週和第 328 週為例，將此二週的估計係數以及所配適之即期利率，分別以未考慮流動性以及流動性加權兩種結果來作比較，表四為第 153 週，未考慮流動性以及考慮流動性加權的估計係數比較表。

表四 考慮流動性以及未考慮流動性加權的估計係數比較(第 153 週)

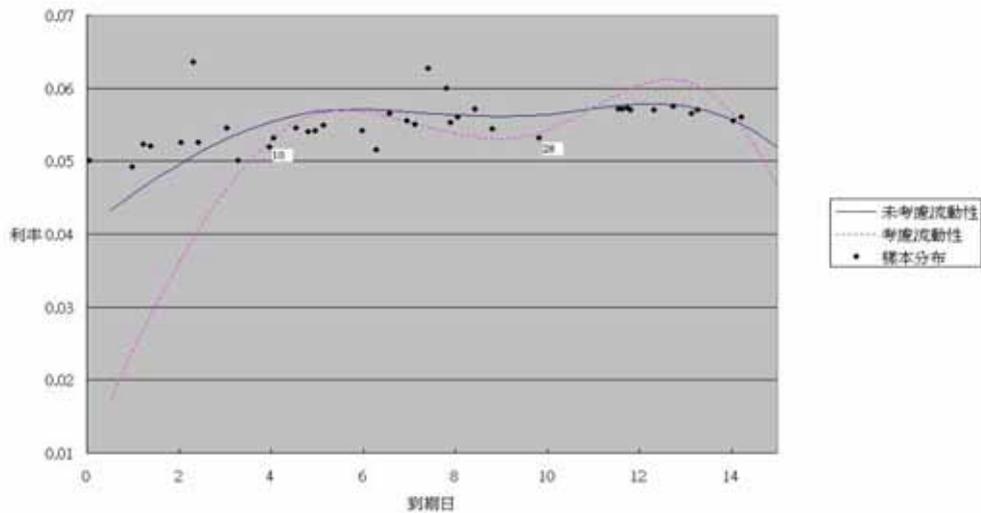
模型比較 \ 估計係數	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
未考慮流動性	8.2979* (94.94)	11.4420* (68.56)	11.7233* (37.11)	11.7424* (21.99)	7.6983* (7.05)	13.5939 (1.63)	-24.2436 (-0.68)
考慮流動性	7.9935* (43.02)	12.1574* (54.81)	11.1157* (31.85)	12.9439* (20.29)	5.1194* (3.81)	27.2571* (3.12)	-81.4328* (-2.20)
差額	0.3044	-0.7154	0.6076	-1.2015	2.5789	-13.6632	57.1892

註：1.括號內之數字表示各參數的 t 值。

2. “*” 代表在顯著水準為 0.05 時，係數顯著異於零。

3.第 153 週的樣本數為 39 種債券，估計 7 個參數(df=39-7=32)，虛無假設為各參數值=0，屬於雙尾檢定，顯著水準為 0.9 時，拒絕域為 t 統計量的絕對值>1.6694。顯著水準為 0.95 時，拒絕域為 t 統計量的絕對值>2.0378；顯著水準為 0.99 時，拒絕域為 t 統計量的絕對值>2.7408。

圖八為兩個模型所配適的即期利率和實際樣本點分佈的比較圖，在考慮流動性不足的問題時，債券 10 因為佔權重較鄰近其他債券為大[參見表五]，為了使流動性高的債券估計誤差變小，加權後的利率期限結構由圖八可將會向債券 10 靠近，使得流動性加權的利率期限結構前端呈現向下降的型態；而債券 28 之權重亦較其他相近到期日債券的權重來得大，導致利率期限結構在該時期呈現凹陷的情形。



- 註：1.第 153 週為 1998 年 11 月 27 日，當天所觀察到之殖利率，與考慮及未考慮流動性限制問題，所建構之利率期限結構。
 2.該觀察時點總共樣本數為 39 種債券。
 3.實線部份代表未考慮流動性限制問題，所建構之利率期限結構；虛線部份代表考慮流動性限制後，所建構之利率期限結構。

圖八 考慮流動性以及未考慮流動性加權的利率期限結構比較圖(第 153 週)

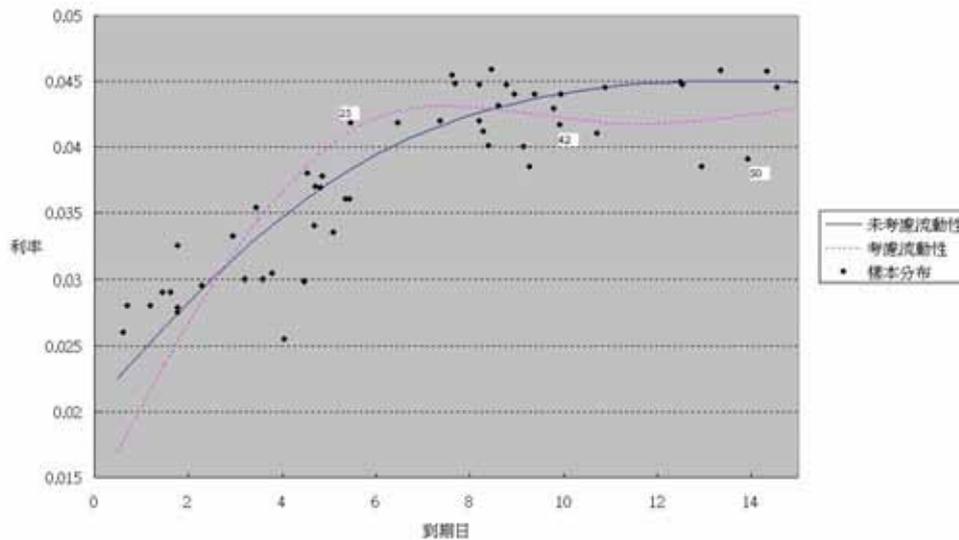
表五為在第 328 週，考慮流動性及未考慮流動性加權的估計係數比較表，而圖九為兩個模型所配適的即期利率和實際樣本的比較圖。

表五 未考慮流動性以及流動性加權的係數變化比較表(第 328 週)

估計係數 模型比較	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
未考慮流動性	9.1582* (45.84)	13.6392* (61.91)	14.8845* (43.52)	13.8127* (26.55)	10.9571* (10.87)	6.8111* (2.20)	-27.1089 (-0.12)	166.6318 (0.15)
考慮流動性	9.0736* (23.24)	13.9021* (39.33)	14.1004* (29.36)	14.9847* (25.57)	10.3666* (10.28)	11.9928* (3.79)	-488.2668* (-2.51)	2425.7250* (2.55)
差額	0.0846	-0.2629	0.7841	-1.172	0.5905	-5.1817	461.1579	-2259.09

- 註：1.括號內之數字表示各參數的 t 值。
 2.“*” 代表在顯著水準為 0.05 時，係數顯著異於零。
 3.第 328 週的樣本數為 64 支，估計 8 個參數($df=64-8=56$)，顯著水準為 0.9 時，拒絕域為 t 統計量的絕對值>1.6736；顯著水準為 0.95 時，拒絕域為 t 統計量的絕對值>2.0042；顯著水準為 0.99 時，拒絕域為 t 統計量的絕對值>2.6688。

由圖九可以發現，當週由於債券 25 有較大的比重，加權後的利率曲線中段比原來的曲線更高，而又因為債券 42 和債券 50 所佔權重高，又使得加權後的利率曲線後段呈現下陷的型態。



- 註：1.第 328 週為 2002 年 4 月 5 日，當天所觀察到之殖利率，與考慮及未考慮流動性限制問題，所建構之利率期限結構。
 2.該觀察時點總共樣本數為 64 種債券。
 3.實線部份代表未考慮流動性限制問題，所建構之利率期限結構；虛線部份代表考慮流動性限制後，所建構之利率期限結構。

圖九 考慮流動性以及未考慮流動性加權的利率期限結構比較圖
(第 328 週)

由圖八和圖九的比較可以發現，在同樣的債券資料下，未考慮流動性和考慮流動性加權所估算的結果，會產生有明顯的差異。相對之下，未考慮流動性的基礎樣條函數所配適的即期利率較為平緩，變化較小；而以流動性加權目標的基礎樣條函數，所配適的即期利率則有較明顯的變化。故考量台灣公債市場流動性不足的實際狀況，以流動性加權的基礎樣條函數所配適的結果，應較符合目前台灣公債市場的實際交易情形。

肆·結論

本研究針對基礎樣條函數，分別在考慮流動性加權因子與 VRP 的修正條件下，來進行國內公債市場利率期間結構的配適，並與原始基礎樣條函數的配

適結果做一比較。本文實證結果顯示以原始基礎樣條函數，來估計台灣公債市場之利率期限結構，可以獲得相當精確的結果，就利率期限結構之形狀而言，大致都能符合上升型、下降型及駝峰型，並呈現一致的走勢，其平均判定係數即高達 94.03%，而在考慮台灣公債市場流動性不足的限制因素，以流動性加權因子修正基礎樣條函數所估計的結果，不但有效解決樣本期間中段配適能力較低的現象，更大幅提高判定係數達 97.6%，顯見加入流動性加權因子修正後的基礎樣條函數，會具有更佳之配適能力。

由於國內外有關應用基礎樣條函數之相關研究上，在參數及節點的設定上，皆無因應債券到期日實際情形分段估算，使得此一模型所得之估計結果，在某些觀察期間的配適能力並不理想。本文考慮上述缺失，修正基礎樣條函數在節點之選擇，將樣本期間依債券最長到期日的不同，分成三個時段進行估算，以不同之 m 值及節點位置，以求獲得更精確的估算結果。另外，由於台灣債券市場與國外市場相較，顯得流動性不足，而國內相關文獻尚無針對此一限制進行探討，故本研究為能求得更具有代表意義的配適結果，以實際的交易資料設定權重，來修正基礎樣條函數。至於以 VRP 來修正基礎樣條函數的相關研究，目前國內外並無相關之實證結果，故本文亦將 VRP 因子加入基礎樣條函數，試圖尋求更精確的估算結果。雖然本文以 VRP 修正基礎樣條函數的實證結果，並不顯著，可能是由於 VRP 主要針對立方樣條函數進行修正，而本研究將其應用於基礎樣條函數上，在參數設定及模型適合度方面可能並非完全適用。

參考文獻

- 周建新、于鴻福、張千雲，「利率期限結構估計模型之實證研究」，*管理學報*，第二十卷第四期，2003年，頁 775-804。
- 賴曉璐，「政府公債殖利率曲線形狀與免疫策略的選擇」，國立台灣大學財務金融學研究所碩士論文，1996年。
- Brennan, M. J. and Schwartz, E. S., "A Continuous-Time Approach to the Pricing of Bonds", *Journal of Banking and Finance*, 3(2), 1979, pp. 133-156.
- Carleton, W.T. and Cooper, I.A., "Estimation and Uses of the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Finance*, 31(4), 1976, pp. 1067-1083.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S.A. Ross., "A Theory of the Term Structure of Interest Rate", *Econometrica*, 53(2), 1985, pp.385-407.
- Deacon, M. and A. Derry., "Estimating the Term Structure of Interest Rates", Working Paper, No.24, Bank of England, 1994.

- Dothan, L. U., "On the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Financial Economics*, 1978, pp. 59-69.
- Fisher, M., D. Nychka and D. Zervos. , "Fitting the Term Structure of Interest Rates with Smoothing Splines", *Finance and Economics Discussion Series, Federal Reserve Board Paper*, 95(1), January, 1995.
- Heath, D., R. Jarrow and Merton, A., "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A new Methodology for Contingent Claims Valuation", *Econometrica*, (60), 1992.
- Ho, T. S., and S. Lee, "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claim", *Journal of Finance*, 41, 1986, pp. 1011-1028.
- Lin, B.H. and D.A. Paxson, "Term Structure Volatility and Bond Futures Embedded Options", *Journal of Business Financial and Accounting*, 22(1), January, 1995, pp. 347-388.
- Lin, B. H., "Fitting the Term Structure of Interest Rates Using B-Spline: the Case of Taiwanese Government Bonds", *Applied Financial Economics*, 12(1), 2002, pp. 55-75.
- Mastronikola, K., "Yield Curves for Gilt-Edged Stocks: A New Model", *Bank of England Discussion Paper (Technical Series)*, 49, December, 1991.
- McCulloch, J. H., "Measure the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Business*, 44, 1971, pp.19-31.
- McCulloch, J. H., "The Tax-Adjusted Yield Curve", *Journal of Finance*, 30(3), 1975, pp. 811-830.
- Powell, M.J.D., "Approximation Theory and Methods", *Cambridge University Press*. 1981.
- Schaefer, S. M., "Measuring a Tax-Specific Term Structure of Interest Rates in the Market of British Government Securities", *The Economic Journal*, 91, 1981, pp. 415-438.
- Schaefer, S. M. and E. S. Schwartz., "Time Dependent Variance and the Pricing of Bond Options", *The Journal of Finance*, December, 1987.
- Shea, G. S., "Interest Rate Term Structure Estimation with Exponential Splines: A Note", *The Journal of Finance*, 6(1), 1985, pp. 319-325.
- Steeley, J. M., "Estimating the Gilt-Edged Term Structure Basis Spline and Confidence", *Journal of Business Finance and Accounting*, 18, 1991, pp. 513-529.
- Subramanian, K. V., "Term Structure Estimation in Illiquid Markets", *The Journal of Fixed Income*, 11, 2001, pp.77-86.
- Vasicek, O. and H. G., Fong, "Term Structure Modeling Using Exponential Splines", *Journal of Finance*, 37, 1982, pp.339-356.
- Waggoner, D. F., "Spline Methods for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices", *Federal Reserve Bank of Atlanta, Working Paper*, 1997.
- Yu, S. W., "*The Impact of Delivery Options on Hedging with Bond Futures*", PhD Thesis, University of Birmingham, 1995.

附錄一

附表一 台灣公債之樣本資料

公債碼	發行日	年數	到期日	票面利率	年付息次數
00811 央債 81-1	1991/11/22	5	1996/11/22	9	2
00814 央債 81-4	1992/3/13	5	1997/3/13	8.5	2
00121 82 交建甲一	1993/6/23	4	1997/6/23	8.25	2
00821 央債 82-1	1992/7/24	5	1997/7/24	8.5	2
00822 央債 82-2	1992/8/28	5	1997/8/28	8.5	2
00825 央債 82-5	1993/3/19	5	1998/3/19	8.5	2
00851 央債 85-1	1995/10/20	3	1998/10/20	0	0
00852 央債 85-2	1995/11/24	3	1998/11/24	0	0
00812 央債 81-2	1991/12/20	7	1998/12/20	8.75	2
00823 央債 82-3	1992/11/27	7	1999/11/27	8.5	2
00824 央債 82-4	1993/2/19	7	2000/2/19	8.5	2
00826 央債 82-6	1993/4/16	7	2000/4/16	8.5	2
00832 央債 83-2	1993/12/17	7	2000/12/17	8.25	2
A83604 北二高四	1994/3/25	7	2001/3/25	8	2
A83302 83 交建甲二	1994/4/29	7	2001/4/29	7.75	2
A84102 央債 84-2	1994/12/16	7	2001/12/16	7.6	2
A84303 84 交建甲三	1995/3/17	7	2002/3/17	7.6	2
A85103 央債 85-3	1995/12/22	7	2002/12/22	7.25	1
A83101 央債 83-1	1993/9/22	10	2003/9/22	8.75	2
A83103 央債 83-3	1994/1/18	10	2004/1/18	8.25	2
A84101 央債 84-1	1994/11/18	10	2004/11/18	7.75	2
A84304 84 交建甲四	1995/6/16	15	2010/6/16	8	2
A85401 85 交建乙一	1995/7/21	15	2010/7/21	7.75	2
A85305 85 交建甲五	1995/8/25	15	2010/8/25	7.6	2
A85306 85 交建甲六	1995/9/22	15	2010/9/22	7.35	2
A85307 85 交建甲七	1996/1/19	10	2006/1/19	7.3	1
A85402 85 交建乙二	1996/3/22	15	2011/3/22	7.3	1
A85308 85 交建甲八	1996/4/26	10	2006/4/26	7.2	1

附表一 台灣公債之樣本資料 (續)

公債碼	發行日	年數	到期日	票面利率	年付息次數
A85104 85 央債甲四	1996/6/18	7	2003/6/18	7	1
A86309 86 交建甲九	1996/8/23	15	2011/8/23	7.1	1
A86101 86 央債甲一	1996/9/24	10	2006/9/24	6.9	1
A86102 86 央債甲二	1996/10/22	10	2006/10/22	6.8	1
A86103 86 央債甲三	1996/11/19	7	2003/11/19	6.6	1
C86101 北建債 86	1996/12/17	10	2006/12/17	5.997	1
A86104 86 央債甲四	1996/12/20	10	2006/12/20	6.8	1
A86310 86 交建甲十	1997/1/21	15	2012/1/21	6.9	1
A86403 86 交建乙三	1997/3/11	15	2012/3/11	6.9	1
C86102 北建債 86 二	1997/5/8	10	2007/5/8	6.33	1
A87101 87 央債甲一	1997/9/23	10	2007/9/23	6.375	1
A87102 87 央債甲二	1997/11/21	5	2002/11/21	6.125	1
A87103 87 央債甲三	1997/12/19	15	2012/12/19	6.875	1
A87201 87 央債乙一	1998/2/20	15	2013/2/20	6.875	1
A87104 87 央債甲四	1998/3/17	7	2005/3/17	6.25	1
C87101 北建債 87	1998/6/25	7	2005/6/25	6.7	1
A88101 88 央債甲一	1998/9/25	10	2008/9/25	5.125	1
C88101 北建債 88	1998/11/9	7	2005/11/9	5.5	1
A88102 88 央債甲二	1998/11/24	20	2018/11/24	5.5	1
A88103 88 央債甲三	1999/1/22	20	2019/1/22	5.25	1
A88201 88 央債乙一	1999/4/23	20	2019/4/23	5.875	1
A89101 89 央債甲一	1999/7/23	5	2004/7/23	5.875	1
A89102 89 央債甲二	1999/8/20	10	2009/8/20	6.25	1
A89103 89 央債甲三	1999/9/28	15	2014/9/28	6.125	1
A89104 89 央債甲四	1999/10/15	15	2014/10/15	6.125	1
A89105 89 央債甲五	1999/11/23	10	2009/11/23	5.875	1
A89106 89 央債甲六	1999/12/17	10	2009/12/17	6	1
A89107 89 央債甲七	2000/1/18	20	2020/1/18	6.25	1
A89108 89 央債甲八	2000/2/15	7	2007/2/15	5.625	1
A89109 89 央債甲九	2000/3/14	15	2015/3/14	6.125	1

附表一 台灣公債之樣本資料 (續)

公債碼	發行日	年數	到期日	票面利率	年付息次數
A89201 89 央債乙一	2000/4/21	20	2020/4/21	5.875	1
A89110 89 央債甲十	2000/6/16	10	2010/6/16	5.75	1
A89111 89 央債甲 11	2000/8/11	15	2015/8/11	5.125	1
C89101 北建債 89	2000/8/15	7	2007/8/15	5.2	1
A89112 89 央債甲 12	2000/9/13	5	2005/9/13	5.125	1
C89102 北建債 89 二	2000/9/15	7	2007/9/15	5.375	1
A89113 89 央債甲 13	2000/11/14	20	2020/11/14	5.375	1
A89114 89 央債甲 14	2000/12/15	10	2010/11/15	5.125	1
A90101 90 央債甲一	2001/1/9	10	2011/1/19	5.125	1
A90102 90 央債甲二	2001/2/13	20	2021/2/13	5	1
A90103 90 央債甲三	2001/3/6	15	2016/3/6	4.625	1
A90104 90 央債甲四	2001/5/8	20	2021/5/8	4.625	1
C90101 90 北建債一	2001/5/30	10	2011/5/30	4.619	1
A90105 90 央債甲五	2001/7/17	30	2031/7/17	3.625	1
C90102 90 北建債二	2001/7/18	10	2011/7/18	3.698	1
A90106 90 央債甲六	2001/8/7	15	2016/8/7	3.75	1
A90201 90 央債乙 01	2001/9/11	20	2021/9/11	4	1
A90107 90 央債甲七	2001/10/19	15	2016/10/19	3.5	1
A90108 90 央債甲八	2001/11/13	20	2021/11/13	3.875	1
A91101 91 央債甲一	2002/1/18	2	2004/1/18	2.25	1
A91102 91 央債甲二	2002/1/29	5	2007/1/29	3	1
A91103 91 央債甲三	2002/2/5	20	2022/2/5	4.25	1
A91104 91 央債甲四	2002/3/8	10	2012/3/8	3.625	1
A91105 91 央債甲五	2002/5/28	2	2004/5/28	2.75	1
A91106 91 央債甲六	2002/7/30	5	2007/7/30	2.625	1
A91107 91 央債甲七	2002/8/16	20	2022/8/16	3.75	1
A91108 91 央債甲八	2002/9/10	10	2012/9/10	3.25	1

The Estimation of Term Structure of Interest Rates in Taiwan Government Bond Market Using the Modified B-Spline Model

JIAN-HSIN CHOU, HONG-FWU YU,
CHUNG-HSIEN CHANG, CHIEN-YUN CHANG*

ABSTRACT

This paper uses the Basis spline model to fit the term structure of interest rates in the Taiwan Government Bond market. The empirical results show that the fitting performance of B-spline model is quite well, which has a mean R-square higher than 94.03%. However, the Taiwan Government bond market is an illiquid market, it must consider the illiquidity constraint when estimating the term structure of interest rates. This paper uses the liquidity-weighted factors to modify the original B-spline model. The fitting performance of B-spline model with liquidity-weighted objective functions is better than the original one, and the mean R-square increases to 97.6%. Based on the results of this study, we conclude the fitting performance of B-spline model could be effectively improved considering the illiquidity constraint. Meanwhile, in order to reduce oscillations at longer maturities for spline estimating models, we also adopt the variable roughness penalty (VRP) to modify the original B-spline model. But, unfortunately, we conclude that the term structure fitting improvement is quite limited.

Keywords: term structure of interest rate, basis spline model, variable roughness penalty

* Jian-Hsin CHOU, Associate Professor, Department of Finance, National Kaohsiung First University of Science and Technology. Hong-Fwu YU, Professor, Department of Industrial Management, National For Formosa University. Chung-Hsien CHANG, Shuang Ho Branch, Tainan Business Bank. Chien-Yun CHANG, Lecturer, Department of Financial and Insurance Management, Hsiuping Institute of Technology / Ph.D. Student, Department of Finance, National Kaohsiung First University of Science and Technology.