輔仁管理評論
中華民國 89 年 9 月，第七卷第二期，137-160

產能及材料限制下供應鏈排程之研究

葉宏謨
輔仁大學資訊管理學系

(收稿日期：88 年 4 月 26 日；接受刊登日期：88 年 8 月 1 日)

摘要

由於企業國際化以及網際網路的廣泛應用，產能及材料限制下的跨廠商供應鏈之排程已經成為重要的研究課題。本研究探討在需求變動下如何決定生產排程，使總在製品庫存成本及完成品早交、遲交成本為最低，並滿足最小批量及產能等限制條件。本研究以數學演繹的方法，推演出 MRP (材料需求規劃) 排程、最佳排程之下界、ESD (最早開工日) 排程及有限產能排程。最後一個排程即本研究的結果，前面的排程是本研究提出的方法之過程。本研究的主要研究方法為最適控制理論。所有排程的導出均經數學推演，重要的命題並經定理證明。根據這些經過証明無誤的數學式，設計各種排程的演算法。本研究以數量方法求解不考慮產能及庫存限制的最適控制理論模型，求出最佳解，作為可行解的下界，接著再以一探索法修改最佳解使成為可行解。本研究以大量資料測試所提出的方法，包括常數需求、季節性需求、階梯式需求及隨機產生的問題。結果顯示本研究所提方法確能改善傳統 MRP 排程的效果，並極接近理論上之下界值。

關鍵詞彙：供應鏈，材料需求規劃，最適控制理論

壹．導論

在程序生產製造業 (process manufacturing industry) 中，從材料投入到完成品產出，歷經多個階段 (stages)，而生產過程中，並無其他主要裝配零件加入。所謂階段，可以是廠內的工作站，也可以是不同工廠中的工作站，或是位於不同國家的工廠。階段也可以包含上游的材料供應商或下游的客戶。不論是從原材料到完成品的生產活動或是從材料供應商到客戶的商品流動，皆構成一個供應鏈 (supply chain)。故本文所討論的供應鏈包括跨公司、跨廠的生產配銷系統，也包括廠內的串式生產系統 (serial production system)。串式生產系統的例子很多，例如水泥廠、煉油廠、石化工廠、或精密鑄造廠等。以生產高爾夫球桿頭精密鑄造廠為例：前製程是技術密集的鑄件在台灣生產，後製程是勞力密集的磨光 (finishing)，在大陸生產。前製程包括射蠟階段的蠟模、浸漿階段的殼模、澆鑄及切割階段的鑄件。後製程包括磨光、上漆、包裝等。高爾夫球桿頭一律是訂單生產。各品牌產品雖然不同但製程則非常相似，且均為程序生產 (process manufacturing)。因高爾夫球桿頭在製程上具有相當大的同質性，不同產品所使用的設備相同，並少有更換模具等準備作業 (set-ups)，因而可忽略不

同產品間的準備作業成本。供應鏈之中，階段與階段間的前置時間不同，例如蠟模完成後要放置 3 至 4 小時才能安定，浸漿後要 24 小時的乾燥時間等。因此，各階段什麼時候應生產多少數量、庫存多少數量，才能使總成本最低，遂成為一個重要的問題。在訂單生產環境中，訂單在供應鏈的各階段是不應該被切割的，亦即各階段的產能應依交期順序分派給訂單。訂單太早生產或太晚生產均會造成損失,例如太早生產則半製品有佔較多空間、需較多人力管理、放置過久會變質等問題。太晚生產則有客戶交期延後的問題等。若訂單的早交晚交損失 (earliness and tardiness penalties) 和在製品的存貨成本不因訂單的不同而異，則訂單是應該依交期順序投入生產的。順序雖不是問題，什麼時候投入生產總成本才會最低則是重要的問題。跨廠產銷系統也有類似的現象。例如：在大陸東北採購原木，用火車運到杭州裁成木片，再用卡車運到上海做成玩具積木，再海運到台灣品檢、包裝，再空運到美國銷售。當美國客戶下訂單給台灣公司時，台灣方面就必須決定每一個階段在每一期間的生產量及庫存量。這裡所謂的「生產」是廣義的，包括運輸、檢驗等。本研究所探討的供應鏈雖不考慮準備作業，但因供應鏈中常涉及整批生產及海陸空運輸，因而必須考慮最低批量。

探討動態排程的研究很多。Wager 和 Whitin [1958] 以動態規劃法解決這個排程問題，這是早期唯一能求出最佳解的方法。由於這個方法太複雜無法被使用者接受，至今尚未能廣泛應用於實際環境中。Silver 和 Meal [1973] 提出較簡單的探索法，稱為 Silver-Meal Heuristic。這個方法雖不一定能求出最佳解，但也相當接近了。Deleersnyder 等人 [1992] 曾探討串式生產系統之拉式及推式系統，並提出一效率更好的混合系統。他們假設各階段機器均相同，且前後階段間的前置時間為 1，亦即不考慮製程間可能的延遲時間。到目前為止，實務上用的最多的仍然是週期訂購量法 (periodic order quantity)、最低總成本法 (least total cost) 及零件期間平衡法 (part-period balancing) 等簡便的方法 [Silver and Peterson, 1985]。這些方法均無法求得最佳解或近似最佳解，而且只考慮單一階層，無法考慮到多階層 (multi-echelon)。即使是今日的 MRP 系統大多仍使用這種粗糙的方法。此外，MRP 系統無法考慮產能的限制。本研究的動機就是要研發一套能考慮多階層及產能限制並可求出近似最佳解的方法，以改善串式生產系統或供應鏈排程的效率。

本論文的目的是提出一套優於傳統材料需求計劃 (MRP, Material Requirement Planning) 的生產計劃法，以求出在變動需求下供應鏈各階段的最佳排程。本研究先以逐批法 MRP 求出使系統最早達到目標庫存量的排程，再

根據該排程求出不考慮庫存及產能限制的排程，即最佳排程的下界 (lower bound)，再修改排程使庫存量及生產量不超過下限，接著求出最早開工之排程，再根據最早開工排程求出有限產能排程，此即本研究提出之最適控制解。

本論文第貳章討論供應鏈 (或串式生產系統) 及目標函數的數學模型。第參章探討應用 MRP 於此系統的結果。第肆章提出本研究的生產計劃法----以最適控制理論解出滿足產能及材料限制之排程。第肆章第一節探討最佳排程下界解 (LBD)。第二節討論非負在製品庫存及最小批量。第三節探討最早開工排程 (ESD)。第四節探討有限產能解 (FCS, Finite Capacity Schedule)。本論文並提出各種排程的演算法。第伍章敘述本研究的實驗設計及結果。第陸章是本研究的結論。

貳．供應鏈系統之數學模式

正如一般的 MRP 系統，本研究假設第 n 期的完成品需求，$d(n)$，是確定的 (deterministic) 和動態的，亦即隨期間變動的 (time varying)。供應鏈中共有 N 階段，可以看成 N 個工作中心串聯成一生產線。本研究的問題是:在已知各期完成品需求、各階段前置時間、各階段目標庫存、及各階段期初存貨的前題下,決定各期各階段最適當的生產量及庫存量。本研究使用的符號如下：

n = 期間，$n=0,\cdots,T$。

j = 階段或工作中心，$j=1,\cdots,N$。

MC_j= 工作中心 j。

$d(n)$=第 n 期的完成品需求。

$i_j(n)$ =第 n 期初介於 MC_j 和 MC_{j+1} 間之在製品庫存，$j=1,\cdots,N-1$。

$i_N(n)$=第 n 期初之完成品庫存量。

$i_N^+(n)$ =第 n 期初之完成品庫存量，若 $i_N(n) \geq 0$。若 $i_N(n) < 0$ 則 $i_N^+(n) = 0$。

$i_N^-(n)$ =第 n 期初之完成品不足量，若 $i_N(n) < 0$。若 $i_N(n) \geq 0$ 則 $i_N^-(n) = 0$。

$p_j(n)$=第 n 期 MC_j 之生產量。

w_j= 介於 MC_{j-1} 和 MC_j 之間的前置時間。

$\bar{i}_j$ = MC_j之目標庫存量，$\bar{i}_N = 0$。$P_j^{MIN} \leq \bar{i}_j \leq P_j^{MAX}$，$j=1,\cdots,N-1$。

TC= 總成本。

$x_j(n)$=對生產計畫量 $p_j(n-1)$ 及 $p_j(n)$ 的擾動量。

$\Delta TC_j^k(n,x) =$ 擾動量 $x_j(n)$ 對 TC 的影響量。

$c_j = MC_j$的庫存處罰係數 (penalty)。假設$c_j \le c_{j+1}, \forall j = 1,\Lambda\ , N-2$。

$c_N^+ =$ 完成品的庫存處罰係數。假設$c_j \le c_N^+, \forall j = 1,\Lambda\ , N-1$。

$c_N^- =$ 完成品的庫存不足處罰係數。假設$c_j \le c_N^-, \forall j = 1,\Lambda\ , N-1$。

$P_j^{MIN} = MC_j$的最小批量，$j=1,\cdots,N-1$。

$P_j^{MAX} = MC_j$的產能，$j=1,\cdots,N-1$。

$p_j^e(n) =$ ESD 排程中，第 n 期 MC_j 之生產量。

$S_j(n) =$ 第 n 期 MC_j 之閒置產能。

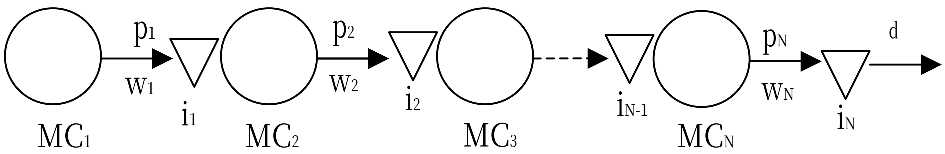
$AP_j^{MAX}(n) =$ 第 n 期 MC_j 之累積有效產能。

$AL_j(n) =$ 第 n 期 MC_j 之累積負荷。

$AO_j(n) =$ 第 n 期 MC_j 之累積超負荷。

$O_j(n) =$ 第 n 期 MC_j 之不可調整之超負荷。

本論文所探討的供應鏈如圖一所示。



圖一　供應鏈系統

假設 $p_j(n)$ 從 $i_{j-1}(n)$ 出來在 MC_j 加工所需的時間為 1 (即在第 n 期之內加工完畢)，延遲時間為 w_j-1，延遲的原因包括冷卻、烘烤、乾燥、運輸等。例如 MC_j表示在上海工廠裝運貨物到台灣。若以一天為一期，$p_j(n)$ 為第 n 天所處理的裝運量，w_j-1 則為從上海到台灣的海運時間。原材料投入 MC_1，經 w_1期間後轉入 i_1庫存。假設原材料供應不虞匱乏。MC_2接到生產指令時從 i_1領出材料經 w_2 期間後轉入 i_2 庫存。依此類推，MC_N接到生產指令時從 i_{N-1}領出材料經 w_N 期間後轉入完成品庫存 i_N。

以上敘述可寫成下式：

$$\begin{cases} i_j(n+1) = i_j(n) - p_{j+1}(n) + p_j(n-w_j),\ \forall j = 1,\Lambda\ , N-1; n = 0,\Lambda\ , T-1; \\ i_N(n+1) = i_N(n) - d(n) + p_N(n-w_N), \forall n = 0,\Lambda\ , T-1; \end{cases} \quad (1)$$

在(1)式中，當 $n\text{-}w_j<0$ 時，$p_j(n\text{-}w_j)$為已知的己開訂單 (open-order) 或在途量 (on-order)，亦即預定接收量 (scheduled receipt)，是已知的系統起始條件。另一個起始條件為在庫量 (on-hand) 亦為已知：

$$\begin{aligned} &p_j(n-w_j), \forall n-w_j<0 \\ &i_j(0) \geq 0, \forall j=1,\Lambda\ ,N \end{aligned} \tag{2}$$

完成品容許訂單遲交 (back-order)，在製品庫存則不能為負，故加入以下限制條件：

$$i_j(n) \geq 0 \qquad \forall j=1,\Lambda\ ,N-1; n=0,\Lambda\ ,T-1 \tag{3}$$

各階段有產能、超負荷、可用材料及最小批量等限制，故有以下條件：

$$\min\left\{P_j^{MIN}, i_{j-1}(n)\right\} \leq p_j(n) \leq \max\left\{P_j^{MAX}, P_j^{MAX}+O_j(n)\right\} \tag{4}$$

在海運的例子中，每天能處理的裝船數量有其上限，此為產能限制。但若欲裝船之貨物量超過裝船數量之上限，則可能延遲裝船或另外找運輸工具，視何者成本較低及庫存限制而定。在生產工廠的例子中，工廠有產能上限，但若需求大於產能且不能延遲或延遲不經濟時，就必須利用加班或外包來擴大產能。故(4)式之上限決定於有無不可避免的超負荷。若無不可避免的超負荷，則上限定為產能，否則上限為產能加不可避免的超負荷。裝船出貨則有最低批量的限制，批量太小是不經濟的。工廠生產亦然。但若待裝船貨物太少或待加工之材料太少，產能閒置也是在所難免。故(4)式之下限決定於是否有足夠材料。若材料足夠，則下限為預定之最小批量，若材料少於最低生產批量則下限定為材料供應量。

由於本研究考慮最低批量而假設準備成本可忽略，目標函數訂為：

$$TC = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{T-1}\left\{\sum_{j=1}^{N-1} c_j\left[i_j(n)-\bar{i}_j\right]^2 + c_N^+\left[i_N^+(n)\right]^2 + c_N^-\left[i_N^-\right]^2\right\} \tag{5}$$

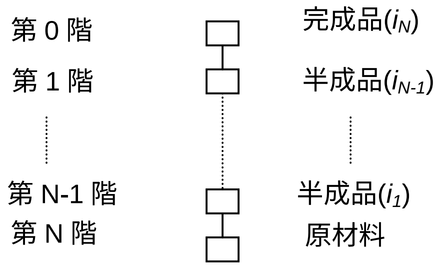
從(5)式可看出，目標函數考慮在製品庫存成本及完成品之早交晚交損失。

(1)式至(5)式構成一個離散時間 (discrete time) 及時間遲滯 (time lag) 的最適控制 (optimal control) 問題。Burdet 和 Sethi [1976] 曾探討時間遲滯的最適控制問題，他們加入額外的狀態變數，雖然理論上可以解決問題但卻使問題更形複雜。Veatch 和 Wein [1994] 提出動態規劃的解法，他們的方法只能解決二

階段串式生產系統，而我們的問題則是多階段的。此外，他們使用連續時間，我們則是離散時間，後者較接近實際系統運作，因而也較具實用性。

參．MRP解

圖一雖為一供應鏈系統，仍可視為產品的生產過程。最後階段的產出為完成品,其他階段的產出為在製品，第一階段的投入為原材料。從原材料投入到完成品產出之間並無其他材料投入，故其材料表 (BOM，Bill of Material) 為一串列而不是樹狀。前階段的產出是後階段產出的子件 (component item)；後階段產出是前階段產出的父件 (parent item)，前後階段之間的前置時間即下階零件轉換成上階零件所需的前置時間。BOM 如圖二所示。



圖二　材料表

圖二中，第 0 階完成品的庫存即本研究之 i_N，第 1 階半成品庫存即本研究之 i_{N-1}，而第 N 階原材料在本研究中假設具有無限庫存，並非本研究的決策變數。

MRP 系統不考慮產能限制，故在本研究的問題範圍內，MRP 的批量法則顯然是逐批法 (lot for lot)。決策者應在一開始的期間 (亦即第 0 期) 就控制生產量，使前置時間之後的各期庫存量均維持在目標庫存水準。此目標庫存水準相當於一般 MRP 系統中的安全存量。MRP 的計算是從完成品開始的，因此

$$i_N(n) = 0 \qquad \forall n = w_N + 1, \Lambda\ , T - 1 \tag{6}$$

要達到這個目標，第 0 期的生產量必須是：

$$p_N(0) = \min\left\{ P_j^{MIN}, -i_N(0) + \sum_{k=0}^{w_N} d(k) - \sum_{k=-w_N}^{-1} p_N(k) \right\} \tag{7}$$

若 $p_N(n) > 0$，則第 1 期以後的生產量為：

$$p_N(n) = d(n + w_N) \qquad \forall n = 1, \Lambda\ , T - 1 \tag{8}$$

否則，第 1 期以後的生產量須由 MRP 演算法求出。

完成品排程算出後，再繼續計算階段 *N-1, N-2,* …直到階段 1 為止。公式如下：

$$p_j(0) = \min\left\{P_j^{MIN}, \bar{i}_j - i_j(0) + \sum_{k=0}^{w_j} p_{j+1}(k) - \sum_{k=-w_i}^{-1} p_j(k)\right\}, \forall j = N-1, N-2, \Lambda\ ,1. \tag{9}$$

若 $p_j(n) > 0$，則第 1 期以後的生產量為：

$$p_j(n) = d\left(n + \sum_{k=j}^{N} w_k\right), \forall j = N-1, \Lambda\ ,1;\ n = 1, \Lambda\ , T-1 \tag{10}$$

否則，第 1 期以後的生產量須由 MRP 演算法求出。

MRP 之演算法如下：

PROCEDURE MRP;

{R is the net requirement for the next period.}

$$R \leftarrow \min\left\{P_j^{MIN}, -i_N(0) + \sum_{k=0}^{w_N} d(k) - \sum_{k=-w_N}^{-1} p_N(k)\right\};$$

FOR n:=0 TO T-1 DO

    IF R<0

    THEN

        $P_N(n) \leftarrow 0$;

        $R \leftarrow d(n+1+w_N)+R$;

    ELSE

        $P_N(n) \leftarrow R$;

        $R \leftarrow d(n+1+w_N)$;

    ENDIF;

NEXT n;

FOR j:=N-1 DOWNTO 1 DO

    R←eq.(9);

```
        FOR n:=0 TO T-1
            IF R<0
            THEN
                Pj(n)←0;
                R←Pj+1(n+1+wj)+R;
            ELSE
                Pj(n)←R;
                R←Pj+1(n+1+wj);
            ENDIF;
        NEXT n;
    NEXT j;
    END.
```

肆．最適控制解

一、最佳排程的下界解 (LBD)

本節只考慮(1)、(2)及(5)式，不考慮(3)和(4)式，故所求得解為最佳排程的下界 (lower bound)。以 MRP 解為基礎，擾動 (perturb) 其生產排程量，觀察這個擾動量對目標函數值的影響，朝有利於目標值的方向繼續擾動，直到目標值不再改善為止。本研究使用成對的擾動，亦即同時對生產排程量 $p_j(n\text{-}1)$ 增加 $x_j(n)$ 及對生產排程量 $p_j(n)$ 減少 $x_j(n)$。這樣的擾動，最多只會改變二個庫存量，較容易控制目標值逐步改善的過程。擾動的影響歸納如下：

1.若 j=1，則：

(1)生產量 p1(n-1) 增加 xj(n)，p1(n) 減少 xj(n) →庫存量 i1(n+w1) 增加 xj(n)。

(2)生產量 p1(n-1) 減少 xj(n)，p1(n) 增加 xj(n) →庫存量 i1(n+w1) 減少 xj(n)。

2.j=2,…,N，則：

(1)生產量 $p_j(n\text{-}1)$ 增加 $x_j(n)$，$p_j(n)$ 減少 $x_j(n)$ →庫存量 $i_{j\text{-}1}(n)$ 減少 $x_j(n)$，$i_j(n+w_j)$ 增加 $x_j(n)$。

(2)生產量 $p_j(n\text{-}1)$ 減少 $x_j(n)$，$p_j(n)$ 增加 $x_j(n)$ →庫存量 $i_{j\text{-}1}(n)$ 增加 $x_j(n)$，$i_j(n+w_j)$ 減少 $x_j(n)$。

設 $\left\{i_j^0(n)\middle| n=0,\Lambda\ ,T-1;\ j=1,\Lambda\ ,N\right\}$ 為 MRP 解，利用上述方法第 k 次調整所有期間所階段後的解為 $\left\{i_j^k(n)\middle| n=0,\Lambda\ ,T-1;\ j=1,\Lambda\ ,N\right\}$。在第 k 次調整後，若生產量 $p_j(n-1)$ 減少 $x_j(n)$，$p_j(n)$ 增加 $x_j(n)$，則目標函數的擾動量為：

當 $j=1$ 時,

$$\Delta TC_1^k(n,x)=\frac{c_1}{2}[x_1(n)]^2-c_1\left[i_1^k(n+w_1)-\bar{i}_1\right]x_1(n) \tag{11}$$

當 $j=2,\cdots,N$ 時,

$$\begin{aligned}\Delta TC_j^k(n,x)&=\frac{c_{j-1}+c_j}{2}x_j(n)^2\\&+\left\{c_{j-1}\left[i_{j-1}^k(n)-\bar{i}_{j-1}\right]-c_j\left[i_j^k(n+w_j)-\bar{i}_j\right]\right\}x_j(n)\end{aligned} \tag{12}$$

定理一、對任一 (j,n,k) 而言，$\Delta TC_j^k(n,x)$ 的最小值小於或等於 0，即

$$\min_x \Delta TC_j^k(n,x)\le 0 \tag{13}$$

証明：

因 $\frac{c_1}{2}>0$，$\frac{c_{j-1}+c_j}{2}>0$，以 $x_j(n)=0$ 代入 (11) 式及 (12) 式均可得 $\Delta TC_j^k(n,x)=0$，表示(11)式及(12)式皆為開口朝上之拋物線且通過原點,其最低點必在横軸上或在横軸之下。故 $\min_x \Delta TC_j^k(n,x)\le 0$。得証。 ■

定理二、對任一 (j,n,k) 而言，能使目標函數 TC 為極小的擾動值 xj(n) 為：

$$x_1(n)=i_1^k(n+w_1)-\bar{i}_1. \tag{14}$$

或

$$x_j(n)=-\frac{c_{j-1}\left[i_{j-1}^k(n)-\bar{i}_j\right]-c_j\left[i_j^k(n+w_j)-\bar{i}_j\right]}{c_{j-1}+c_j},\forall j=2,\Lambda\ ,N. \tag{15}$$

証明：

擾動量 $x_j(n) \in R$，從(11)式及(12)式知 $\Delta TC_j^k(n,x)$ 為 $x_j(n)$ 的連續函數。因 $\frac{d\Delta TC_j^k(n,x)}{dx_j(n)} = (c_{j-1} + c_j)x_j(n) + \{c_{j-1}[i_{j-1}^k(n) - \bar{i}_{j-1}] - c_j[i_j^k(n+w_j) - \bar{i}_j]\} = 0$

且 $\frac{d^2\Delta TC_j^k(n,x)}{dx_j(n)^2} = c_{j-1} + c_j > 0$，

故 $x_j(n) = -\frac{c_{j-1}[i_{j-1}^k(n) - \bar{i}_j] - c_j[i_j^k(n+w_j) - \bar{i}_j]}{c_{j-1} + c_j}$ 可求得 $\Delta TC_j^k(n,x)$ 的最小值。

從定理一知，(14)式及(15)式中的 $x_j(n)$ 必能使 TC 為極小。得證。 ■

當 $j=N$ 時，在(15)中計算 $x_j(n)$ 及在(12)式中計算 $\Delta TC_j^k(n,x)$ 值應遵循以下規則：(從(5)知 $\bar{i}_N = 0$)

1.若 $i_N(n+w_N) > 0$ 則 $c_j = c_j^+$，$i_N^+(n+w_N) = i_N(n+w_N), i_N^-(n+w_N) = 0$，

2.若 $i_N(n+w_N) < 0$ 則 $c_j = c_j^-$，$i_N^-(n+w_N) = -i_N(n+w_N), i_N^+(n+w_N) = 0$.

3.若 $i_N(n+w_N) = 0$ 則 $i_N^+(n+w_N) = i_N^-(n+w_N) = 0$.

當 $i_N(n+w_N) \approx 0$ 時，有可能在擾動後，$i_N(n+w_N)$ 由正變負或由負變正。因 $i_N(n+w_N)$ 極接近零，影響很小，故仍使用上述方法決定 $x_j(n)$ 值、$i_N^+(n+w_N)$ 及 $i_N^-(n+w_N)$。但為了避免受到這種現象的影響，本研究設了一個步幅 (step size) 參數 s，以縮小調整量，在必要時不一次調足，一次只調整 $x_j(n)/s$。

最適控制法求最佳解的方法如下：

PROCEDURE Lower_Bound;

Determine $x_j(n)/s$ for all n, j;

Calculate $\Delta TC_j^k(n,x)$ for all n, j;

WHILE NOT all $|\Delta TC_j^k(n,x)| \le \varepsilon$ DO

FOR $j=N$ DOWNTO 2 DO

FOR $n=1$ TO $T-w_j$ DO

IF $|\Delta TC_j^k(n,x)| > \varepsilon$

THEN

$p_j(n-1) \leftarrow p_j(n-1) - x_j(n)/s;$

$p_j(n) \leftarrow p_j(n) + x_j(n)/s;$

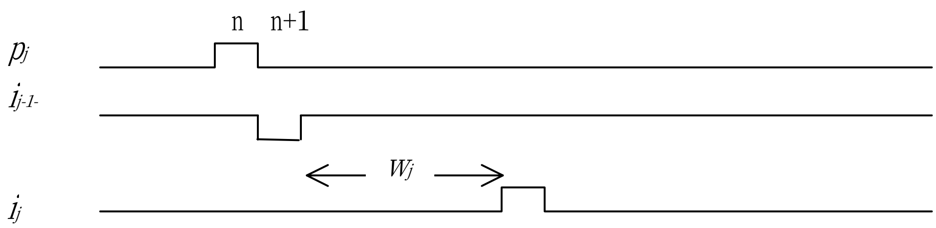
$i_{j-1}(n) \leftarrow i_{j-1}(n) + x_j(n)/s;$

$i_j(n+w_j) \leftarrow i_j(n+w_j) - x_j(n)/s;$

ENDIF;
ENDFOR;
ENDFOR:
Determine $x_j(n)/s$ for all n, j;
Calculate $\Delta TC_j^k(n,x)$ for all n, j;
ENDWHILE;
END.

二、非負庫存及最小批量之考慮

上節方法所得解，有可能違反(3)式及(4)式的限制條件。本節討論使在製品庫存大於或等於零及使生產排程量大於或等於最小批量的方法。本研究提出一個調整生產量及庫存量的探索法 (heuristic)。若第 n 期第 j 階段之生產量比最小批量低 u 單位，則調高第 n 期第 j 階段之生產量 u 單位，再調低第 $n+1$ 期第 j 階段之生產量 u 單位。第 n 期第 j 階段之生產量提高 u 單位之後，第 $n+1$ 期第 $j-1$ 階段之期初庫存量降低 u 單位，第 $n+1+w_j$ 期第 j 階段及其後各階段之期初庫存量則提高了 u 單位。如圖三所示。



圖三　調高 $p_j(n)$ 並調低 $p_j(n+1)$ 所造成的影響

設 $p_{j+1}(n-1) < P_j^{MIN}$ 則可以相同的量調高 $p_{j+1}(n-1)$ 並調低 $p_{j+1}(n)$，如此將只影響到 $i_j(n)$ 及 $i_{j+1}(n+w_{j+1})$，前者調低、後者調高，其調整量與生產調整量相同。這個調整量應該是多少呢？

定理三、若 $p_{j+1}(n-1) < P_{j+1}^{MIN}$，則以圖 3 之方法使 $p_{j+1}(n-1) \ge P_{j+1}^{MIN}$ 的最佳調整法則為：$p_{j+1}(n-1)$ 調高 u 單位、$p_{j+1}(n)$ 調低 u 單位。$u = \max\left\{P_{j+1}^{MIN} - p_{j+1}(n-1), \bar{i}_{j+1} - i_{j+1}(n+w_{j+1})\right\}$。

證明：

由於 $c_j \le c_{j+1}, \forall j = 1,\Lambda\ , N-2$ 及 $c_j \le c_N^+$, $c_j \le c_N^-, \forall j = 1,\Lambda\ , N-1$,

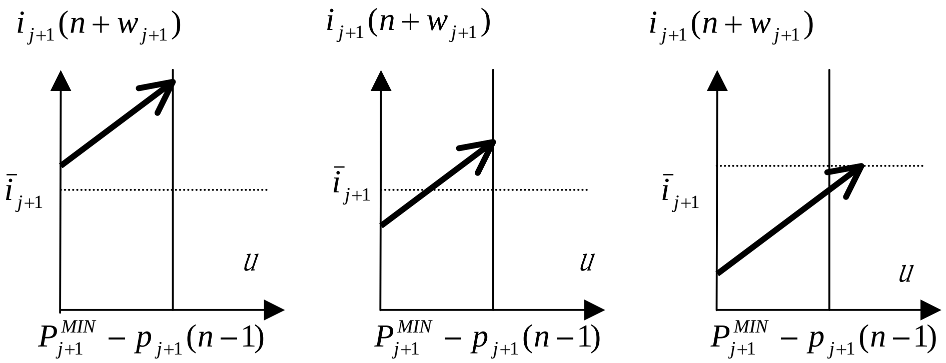
1.當$i_{j+1}(n+w_{j+1}) \geq \bar{i}_{j+1}$時,

$\bar{i}_{j+1} - i_{j+1}(n+w_{j+1}) \leq 0$, 故$u = P_{j+1}^{MIN} - p_{j+1}(n-1)$。調整量 u 若大於$P_{j+1}^{MIN} - p_{j+1}(n-1)$一單位，將減少一單位的$i_j(n)$並增加一單位的$i_{j+1}(n+w_{j+1})$，故必造成額外的成本，所以最佳之調整量必為$P_{j+1}^{MIN} - p_{j+1}(n-1)$。

2.當$i_{j+1}(n+w_{j+1}) < \bar{i}_{j+1}$時,

(1)若$\bar{i}_{j+1} - i_{j+1}(n+w_{j+1}) < P_{j+1}^{MIN} - p_{j+1}(n-1)$，則調高$P_{j+1}^{MIN} - p_{j+1}(n-1)$後，必$\bar{i}_{j+1} < i_{j+1}(n+w_{j+1})$，此時繼續調高將使成本不降反升。

(2)若$\bar{i}_{j+1} - i_{j+1}(n+w_{j+1}) > P_{j+1}^{MIN} - p_{j+1}(n-1)$，則調整量應超過$P_{j+1}^{MIN} - p_{j+1}(n-1)$，也就是繼續調高，使$p_{j+1}(n-1) > P_j^{MIN}$，也使$i_{j+1}(n+w_{j+1})$向上接近$\bar{i}_{j+1}$，成本持續降低，直到$i_{j+1}(n+w_{j+1}) = \bar{i}_{j+1}$，此時成本最低。得証。　■



圖四　　定理三的証明

圖四中，$p_{j+1}(n-1)$調至P_{j+1}^{MIN}時,若$i_{j+1}(n+w_{j+1})$已超過$\bar{i}_{j+1}$，則停止；若$i_{j+1}(n+w_{j+1})$未達$\bar{i}_{j+1}$，則繼續調高$p_{j+1}(n-1)$，使$i_{j+1}(n+w_{j+1})$等於$\bar{i}_{j+1}$，此時成本最低。

定理四、若$i_j(n) < 0$，則以圖三之方法使$i_j(n) \geq 0$的最佳調整法則為：$p_{j+1}(n-1)$調低 u 單位、$p_{j+1}(n)$調高 u 單位。$u = \max\{i_{j+1}(n+w_{j+1}) - \bar{i}_{i+1}, -i_j(n)\}$。

証明：

1.當$i_{j+1}(n+w_{j+1}) - \bar{i}_{i+1} > -i_j(n)$時,

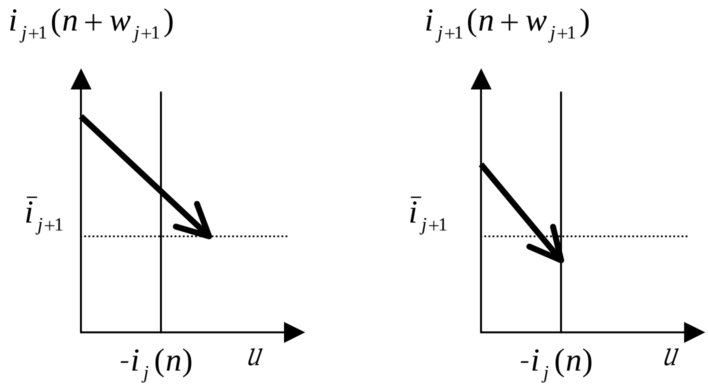
將$i_j(n)$調升為零之後繼續調升一單位會使$i_{j+1}(n+w_{j+1})$繼續下降一單

位，有利於成本的降低，故應繼續調整直到$i_{j+1}(n+w_{j+1})=\bar{i}_{j+1}$為止。

2.當$i_{j+1}(n+w_{j+1})-\bar{i}_{i+1}\le -i_j(n)$時,

將$i_j(n)$調升為零之後，$i_{j+1}(n+w_{j+1})<\bar{i}_{j+1}$，此時繼續調升一單位會使成本上升，故只能調整到$i_j(n)=0$為止。得証。 ■

定理四之証明可以圖五闡明之。



圖五 定理四之証明

以上所述為使 LBD 解能滿足(3)式及(4)式左半部的方法，其演算法如下：

PROCEDURE Lower_Limit;

FOR *n*= *T-1* DOWNTO 1 DO

  FOR *j*= *N* DOWNTO 1 DO

    IF $p_j(n)<P_j^{MIN}$ THEN

      $u=\max\{P_j^{MIN}-p_j(n),\bar{i}_j-i_j(n+1+w_j)\}$;

      $p_j(n)\leftarrow p_j(n)+u$;

      $p_j(n+1)\leftarrow p_j(n+1)-u$;

      IF $n\le T-w_j-1$ THEN $i_j(n+1+w_j)\leftarrow i_j(n+1+w_j)+u$;

      $i_{j-1}(n+1)\leftarrow i_{j-1}(n+1)-u$;

    ENDIF;

    IF $i_{j-1}(n+1)<0$ THEN

      $u=\max\{i_j(n+1+w_{j-1})-\bar{i}_i,-i_{j-1}(n+1)\}$;

      $i_{j-1}(n+1)\leftarrow i_{j-1}(n+1)+u$;

      IF $n\ge w_{j-1}$ THEN $p_{j-1}(n+1-w_{j-1})\leftarrow p_{j-1}(n+1-w_{j-1})-u$;

      IF $n\ge w_{j-1}$ THEN $p_{j-1}(n-w_{j-1})\leftarrow p_j(n-w_{j-1})+u$;

$$i_{j-2}(n+1-w_{j-1}) \leftarrow i_{j-2}(n+1-w_{j-1})-u;$$

```
        ENDIF;
    NEXT j;
NEXT n;
END.
```

在上述調整生產率及庫存量的演算法中，若每一次生產率的調整均導致庫存量的調整，且每一次庫存量的調整均導致生產率的調整，則其調整的順序為期間與階段皆往前的順序，如圖六所示。

	T	T-1	T-2	T-3	T-4	T-5
N		p				
N-1	i			p		
N-2			i			p
N-3					i	

圖六　調整順序

三、最早開工排程

以逐批法 MRP 計算出的排程中，各期間各階段 (製程) 的開工日期是用該法能算出的最晚可能開工日期 (LSD，Latest Start Date)。用第一節方法算出的排程，其開工日期更晚。LSD 排程是由後向前計算的，是一種反向排程 (backward scheduling) ，若不考慮目標函數 (所以也不考慮 $\bar{i}_j$)，各階段只要有材料就在當期把它做完，這樣就可以求出最早可能開工日期 (ESD，Earliest Start Date) 的排程。ESD 排程可用順向排程 (forward scheduling) 的方法求出。在計算 ESD 時，我們不考慮訂單需求量及訂單交期，但考慮產能。LSD 排程剛好相反，考慮訂單需求量及訂單交期，但不考慮產能。

除非管理者作了錯誤的決策，否則我們可以合理的假設：

$$p_1^e(n) = p_1(n) \le P_1^{MAX}, \forall n < 0 \tag{16}$$

顯而易見的，MC_1 的 ESD 排程為：

$$p_1^e(n) = P_1^{MAX}, \forall n = 0, \Lambda , T-1 \tag{17}$$

對 MC_2 以後的階段而言，其 ESD 排程為：

$$p_{j+1}^{e}(n)=\min\left\{i_{j}^{e}(n)+p_{j}^{e}(n-w_{j}),P_{j+1}^{MAX}\right\},$$
$$\forall n=0,\Lambda\ ,T-1;\ j=1,\Lambda\ ,N-1. \tag{18}$$

在計算 $p_{j+1}^{e}(n)$ 時，所有期間的 $p_{j}^{e}(n-w_{j})$ 為已知。當 *n=0* 時，$i_{j}^{e}(0)=i_{j}(0)$ 已知，故由(16)式可求出 $p_{j+1}^{e}(0)$。又由(1)式知：

$i_{j}^{e}(1)=0$，若 $p_{j+1}^{e}(0)=i_{j}^{e}(0)+p_{j}^{e}(-w_{j})$，

$i_{j}^{e}(1)=i_{j}^{e}(0)+p_{j}^{e}(-w_{j})-P_{j+1}^{MAX}$，若 $p_{j+1}^{e}(0)=P_{j+1}^{MAX}$，

利用所求出的 $i_{j}^{e}(1)$ 可求出 $p_{j+1}^{e}(1)$，再利用 $p_{j+1}^{e}(1)$ 又可求出 $i_{j}^{e}(2)$，依此類推。所有期間的 $p_{j+1}^{e}(n)$ 均求出後，再繼續求出所有期間的 $p_{j+2}^{e}(n)$，如此即可得 ESD 排程。演算法如下：

PROCEDURE ESD_Schedule;
$p_{1}^{e}(n)=P_{1}^{MAX},\forall n=0,\Lambda\ ,T-1$;
FOR *j=1* TO *N-1*
　　FOR *n=0* TO *T-1*
　　　　$p_{j+1}^{e}(n)=\min\left\{i_{j}^{e}(n),P_{j+1}^{MAX}\right\}$;
　　　　IF *j<>N-1*
　　　　THEN　$i_{j}^{e}(n+1)=i_{j}^{e}(n)-p_{j+1}^{e}(n)+p_{j}^{e}(n-w_{j})$;
　　　　ELSE　$i_{j}^{e}(n+1)=i_{j}^{e}(n)-d(n)+p_{j}^{e}(n-w_{j})$;
　　NEXT *n*;
NEXT *j*;
END.

四、有限產能排程

在 ESD 排程中，各階段已盡可能的提早生產。故若負荷在產能之下，剩餘的產能勢必無法利用。各階段各期間的閒置產能為：

$$S_{j}(n)=P_{j}^{MAX}-p_{j}^{e}(n),\forall n=0,\Lambda\ ,T-1;\ j=1,\Lambda\ ,N. \tag{19}$$

累積有效產能為：

$$AP_j^{MAX}(n)=\sum_{k=0}^{n}\left[P_j^{MAX}-S_j(k)\right], \quad \forall n=0,\Lambda\ ,T-1;\ j=1,\Lambda\ ,N. \tag{20}$$

累積負荷為：

$$AL_j(n)=\sum_{k=0}^{n}p_j(k), \forall n=0,\Lambda\ ,T-1;\ j=1,\Lambda\ ,N. \tag{21}$$

累積超負荷為：

$$AO_j(n)=\max\left\{AL_j(n)-AP_j^{MAX}(n),0\right\}, \quad \forall n=0,\Lambda\ ,T-1;\ j=1,\Lambda\ ,N. \tag{22}$$

各期間的超負荷量為：

$$O_j(n)=\max\left\{AO_j(n)-AO_j(n-1),0\right\}, \quad \forall n=0,\Lambda\ ,T-1;\ j=1,\Lambda\ ,N. \tag{23}$$

在(23)式中， $AO_j(-1)=0, \forall j=1,\Lambda\ ,N.$。

各期間超負荷量表示該期間的產能必無法滿足負荷，管理者只有尋求其他方法（如加班、委外加工、機動調整，產能等）來解決超負荷的問題。由於本研究假設超負荷是可以接受的（實際環境也是如此），故必可求得可行解。有限產能排程的演算法如下：

PROCEDURE Finite_Capacity_Schedule;

FOR *j=1* TO *N*

  FOR *n=0* TO *T-1*

    $p'_j \leftarrow p_j(n)-O_j(n)-P_j^{MAX}$;

    WHILE $p'_j>0$ DO

      Find the nearest *k<n* wherein $p_j^e(k)>p_j(k)$;

      IF $p_j^e(k)-p_j(k)>p'_j$ THEN

        $p_j(n)\leftarrow p_j(n)-p'_j$;

        $p_j(k)\leftarrow p_j(k)+p'_j$;

        $p'_j \leftarrow 0$;

      ELSE

$p_j(n) \leftarrow p_j(n) - p_j^e(k) + p_j(k)$;

$p'_j \leftarrow p'_j - p_j^e(k) + p_j(k)$;

$p_j(k) \leftarrow p_j^e(k)$;

ENDIF;

ENDWHILE;

NEXT n;

NEXT j;

END.

各訂單產品不同但製程特性類似，故可以忽略準備作業成本，但生產時仍須依訂單交期順序分別投料。故在作有限產能排程調整 LSD 之後，仍應維持訂單的先後順序。亦即本研究只求出各期間應生產的數量，實際應用時，則應依訂單順序投料生產。

伍．實驗

一、實驗設計

本實驗設供應鏈為三階段（N=3），排程的期間數為 12 期（T=12）。三階段的前置時間分別為 2, 3, 3；目標庫存分別為 20, 20, 0；期初庫存分別為 10, 10, 0。需求型態分成三種：常數需求（constant demand）、季節性需求（seasonal demand）、和階梯式需求（step demand），每型需求又分成三種水準，如表一所示。

表一　需求型態

需求	n=0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
D1	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
D2	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
D3	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
D4	18	20	22	20	18	20	22	20	18	20	22	20
D5	16	20	24	20	16	20	24	20	16	20	24	20
D6	14	20	26	20	14	20	26	20	14	20	26	20
D7	18	18	18	22	22	22	22	22	22	18	18	18
D8	16	16	16	24	24	24	24	24	24	16	16	16

D9	14	14	14	26	26	26	26	26	26	14	14	14

己開訂單量或計畫收貨 (scheduled receipt) 分成低、中、高三種，如表二所示。R1 表示計畫收貨量約為平均需求量，R3 表示計畫收貨量約為需求量之高峰，R2 則介於 R1 與 R3 之間。

表二　計畫收貨數量

計畫收貨	R1			R2			R3		
期間\階段	1	2	3	1	2	3	1	2	3
-3		20	20		23	23		26	26
-2	20	20	20	23	23	23	26	26	26
-1	20	20	20	23	23	23	26	26	26

各階段庫存處罰係數分為 4 種，如表三所示。

表三　庫存處罰係數

庫存處罰係數	C_1	C_2	C_3^+	C_4^-
C1	1	1.1	1.5	3
C2	1	1.1	1.5	7.5
C3	1	1.1	10	20
C4	1	1.1	10	50

本研究之產能可以各期不同。在本實驗中，我們假設各期產能相同，分成三種水準；M1、M2 和 M3，其產能分別為：16、20、24。如表四所示。M1 表示低產能，M2 之產能約等於平均需求量，M3 則為高產能，約等於需求量的最高點。

表四　產能

類別	產能
M1 (低於平均需求)	16
M2 (等於平均需求)	20
M3 (高於平均需求)	24

上述參數值之決定過程除參考實際環境外，本研究在初步測試 (pilot test) 中亦曾以較實際環境變化更大的資料測試本研究提出之方法。例如，本研究以計畫收貨量 R2 水準與 4 種庫存處罰係數 (如表三) 測試各種需求狀況下的結果，比較本研究的目標函數值和理論上的下界值 (lower bound) 發現在 C1 及

C2 情況下，本研究結果極為接近下界值，但在 C3 及 C4 情況下，本研究的解則差較多，如表五所示。下界值在 108 組解中只有 37 組可行解，而本研究所得解則全為可行解。此外，C1 及 C2 較接近實際環境，因為 C3 及 C4 之完成品庫存成本比在製品高出約 10 倍，顯然偏高。儘管如此，本研究還是對所有的參數進行正式之資料測試。測試結果顯示即使在 C3、C4 的情況下，本研究之結果亦相當優越。

表五　初步測試本研究與下界值之差距

庫存處罰係數\需求型態	常數需求	季節性需求	階梯式需求
C1	0.0%	2.7%	2.1%
C2	0.0%	0.0%	0.0%
C3	19.5%	3.8%	4.3%
C4	23.1%	2.2%	3.8%

在正式實驗中，本研究以上述 9 種需求型態、3 計畫收貨量、4 種庫存處罰係數及 3 種產能等參數組合做實驗，共得 324 種個案。分別以本研究所提出的方法求解，結果並與 MRP 解及下界解 (LBD，Lower Bound) 比較之。本研究方法所得解必滿足產能及庫存限制條件，MRP 則不一定。為了在同一基礎上作比較，本研究的結果只與可行 (即滿足(3)及(4)式) 之 MRP 解及其對應之下界解比較。因下界解大部分均不可行，本研究與下界解比較之目的是要測量本研究結果與理論上之最佳解的差距。

二、實驗結果

由於 MRP 解及 LBD 解並未考慮限制條件(3)及(4)式，故部份解不可行。在 324 種個案中，MRP 可行解共 124 個，佔 38.3%。在 124 組可行 MRP 解中，下界解共有 50 組可行。各種需求型態及產能下之可行解次數及比例如表六及表七所示。

表六　MRP 可行解次數

產能\需求型態	常數需求	季節性需求	階梯式需求	合計
M1 (低於平均需求)	20	12	0	32
M2 (等於平均需求)	24	0	0	24
M3 (高於平均需求)	28	24	16	68
合計	72	36	16	124

表七 MRP 可行解比例

產能\需求型態	常數需求	季節性需求	階梯式需求	合計
M1 (低於平均需求)	55.6%	33.3%	0%	29.6%
M2 (等於平均需求)	66.7%	0%	0%	22.2%
M3 (高於平均需求)	77.8%	66.7%	44.4%	63.0%
合計	66.7%	33.3%	44.4%	38.3%

由於只能在第一階段投料，各階段間又有前置時間，故即使在 M3 的情況下，若計畫收貨量低，仍有可能產生負的庫存量而成為不可行解。在產能為 M1 而需求為季節性的情況下，MRP 可行解相對的多於 M2 的情況，原因為產能小時，不可避免的超負荷較大，而在本研究中，不可避免的超負荷視為可行，須由管理者以加班或外包之方式克服產能不足之問題。

本研究在初步測試時發現庫存處罰係數在 C1、C2 及 C3、C4 時本研究結果和下界值差距顯然不同，故本研究結果與下界解的比較以 C1、C2 及 C3、C4 分別分析之。如表八至表十一所示。

表八 FCS 優於 MRP 可行解之百分比 (C1、C2)

產能\需求型態	常數需求	季節性需求	階梯式需求	合計
M1 (低於平均需求)	31.6%	30.6%	-	31.2%
M2 (等於平均需求)	43.0%	-	-	43.0%
M3 (高於平均需求)	34.4%	31.3%	20.1%	29.9%
合計	35.9%	31.1%	20.1%	32.8%

表九 FCS 劣於 LBD 解之百分比 (C1、C2)

產能\需求型態	常數需求	季節性需求	階梯式需求	合計
M1 (低於平均需求)	2.5%	0.0%	-	1.6%
M2 (等於平均需求)	2.3%	-	-	2.3%
M3 (高於平均需求)	1.5%	0.7%	0.3%	0.9%
合計	2.1%	0.5%	0.3%	1.4%

表十 FCS 優於 MRP 可行解之百分比 (C3、C4)

產能\需求型態	常數需求	季節性需求	階梯式需求	合計
M1 (低於平均需求)	11.3%	27.3%	-	17.3%
M2 (等於平均需求)	12.0%	-	-	12.0%
M3 (高於平均需求)	9.2%	13.0%	1.9%	8.82%
合計	10.7%	17.8%	1.9%	11.6%

表十一 FCS 劣於 LBD 解之百分比 (C3、C4)

產能\需求型態	常數需求	季節性需求	階梯式需求	合計
M1 (低於平均需求)	1.6%	0.0%	-	1.0%
M2 (等於平均需求)	1.4%	-	-	1.4%
M3 (高於平均需求)	1.4%	0.0%	0.3%	0.6%
合計	1.5%	0.0%	0.3%	0.4%

本研究另以亂數產生 500 組個案資料並計算其 MRP 解、LBD 解和本研究方法求出的解。需求分配為幅度極大的亂數；自 18 至 22 的均勻分配；計畫收量為 R1 水準(20)；庫存處罰係數為 C2 水準；產能為 M3(24)。在全部個案中，共有 243 組 MRP 解為可行，佔全部資料之 48.6%。與這 243 組 MRP 解對應的 LBD 解則全部不可行。實驗結果顯示，雖然實驗條件嚴苛，本研究所得解比 MRP 平均改善了 8.9%，距 LBD 解平均僅 2.3%。改善幅度的平均值及標準差如表十二所示。

表十二 亂數需求實驗結果

比較項目	比 MRP 解好	比 LBD 解差
平均值	8.9%	2.3%
標準差	13.0%	2.7%

針對上述結果，我們作假說檢定如下（μ_M 為本研究解優於 MRP 解的百分比，μ_L 為本研究比 LBD 解差之百分比)：

$$\begin{cases} H_0^M : \mu_M \leq 7.4\% \\ H_1^M : \mu_M > 7.4\% \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0^L : \mu_L \geq 2.6\% \\ H_1^L : \mu_L < 2.6\% \end{cases}$$

第一個檢定的 Z 值為：

$$Z^M = 1.75 > Z_{0.05} = 1.65$$

第二個檢定的 Z 值為：

$$Z^L = -1.87 < -Z_{0.05} = -1.65$$

所以，在 5%的顯著水準之下，分別推翻上述二個虛無假說。亦即，本研究比 MRP 優越程度大於 7.4%，比 LBD 差距小於 2.6%的機會為 95%。

陸・結論

本研究探討訂單生產供應鏈系統之排程。本文假設產品在供應鏈各階段被處理時準備作業可以忽略，但各階段均有最小批量及產能的限制。階段與階段之間均有長短不一的延遲時間。各階段間均有庫存及預設之目標庫存量。最後階段之後的庫存為完成品庫存或遲交訂單 (back-order)，之前的庫存為在製品庫存，不可為負值。本研究假設越後階段的單位庫存成本越高。各階段的在製量為已知，也就是在開始排程時，在階段與階段之間的在製品之時間及數量均可確定。成品需求是動態的，並且是確定性的。本研究的目的是求出各階段在各期間的生產量及庫存量，使在製品庫存或完成品庫存均能接近目標庫存量，亦即各階段在製品庫存成本及完成品早交或遲交損失之總和為最低。

本研究提出最適控制解。首先探討逐批法 MRP 解，接著探討最佳排程的下界，接著再考慮非負在製品庫存及最小批量的限制，接著再探討考慮產能限制的最早開工排程，最後則探討有限產能排程，此即本研究提出來的方法。針對不考慮限制條件(3)及(4)的問題建立最適控制模型並以數量方法求出理論上之最佳解 LBD，作為本研究排程的下界。本研究提出一探索法以修正最佳解使成為可行解，並在後續的實驗中証實其目標函數值極接近下界。在各種排程方法的討論中，本研究均以數學模式推演，提出相關的定理及証明，再根據業經証明無誤的定理設計演算法 本研究以大量資料驗證理論之正確性及方法之優越性。本研究首先以各種參數組合測試 324 個個案，比較本研究結果優於 MRP 可行解的程度及與理論最佳解 LBD 解的差距。實驗結果顯示本研究改善 MRP 解從 11.6%到 32.8%；而僅劣於 LBD 解從 0.4%到 1.4%。本研究另以 500 個需求量為範圍相當大的隨機數的個案測試本研究提出之方法，結果顯示在 5%的顯著水準下，本研究至少改善 MRP 可行解 7.4%而至多比 LBD 差 2.6%。由於 MRP 解及 LBD 解並未考慮限制條件(3)及(4)式，在 500 組個案中，僅有 243 組 MRP 解可行，其中的 LBD 解全部不可行，而本研究則全部可行。由於本研究所提出之方法極為簡單，未來將進一步應用在實際環境的供應鏈排程中。

參考文獻

Burdet, C. A. and Sethi, S. P., "On the Maximum Principle for a Class of Discrete Dynamical Systems with Lags", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 19, 3, 1976, pp.445-454.

Deleersnyder, J.L., Hodgson, T.J., King, R.E., O’Grady, P.J., and Savva, A., "Integrating Kanban Type Pull Systems and MRP Type Push Systems: Insights From a Markovian Model", *IIE Transactions*, 24, 3, 1992, pp.43-56.

Silver, E.A. and Meal, H.C., "A Heuristic for Selecting Lot Size Requirements for the Case of a Deterministic Time-Varying Demand Rate and Discrete Opportunities for Replenishment", *Production and Inventory Management*, 14, 2, 1973, pp.64-74.

Silver, E.A. and Peterson, R., "Decision Systems for Inventory Management and Production Planning", 2nd Ed., 1985.

Veach, M.H. and Wein, L.M., "Optimal Control of a Two-Station Tandem Production/Inventory System", *Operations Research*, 42, 2, 1994, pp.337-350.

Wagner, H.M. and Whitin, T.M., "Dynamic Version of the Economic Lot Size Model", *Management Science*, 5, 1958, pp.89-96.

Capacity and Material Constrained Supply Chain Scheduling

HONG-MO YEH

Department of Information Management, Fu Jen Catholic University

ABSTRACT

The globalization of enterprises and the ubiquitous application of Internet have made the supply chain scheduling under the constraints of capacity and material an important issue. We propose an approach to schedule a supply chain constrained by capacity and material so that the total penalty of the holding cost of work-in-process and finished goods and the back-order cost of finished goods is minimized. Our approach includes an initial solution of traditional MRP schedule, a theoretical lower bound (LBD), an earliest-start-date schedule (ESD), and a finite-capacity schedule (FCS). Our approach is based on optimal control theory. Propositions are proved, based on which we design algorithms for the proposed scheduling method. Optimal solution of the unconstrained problem is obtained by numerical method and is used as the lower bound of the constrained problem. Numerous computational experiments of various demand patterns including constant, seasonal, step, and random generated problems were conducted. The experiments show that our approach results in a great improvement as compared with the traditional MRP schedule. The experiments also show that our solutions are very close to the lower bounds.

Keywords : supply chain, material requirement planning, optimal control theory